Nom :	DS 03	TMEX OISELET Devoir n° 03	Déc. 2022 .../...
Prénom :			

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 — 4 points

On donne la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1 pt **1** Justifier que A est inversible.

$\text{dét}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 4 = 2 - 4 = -2$

$\text{dét}(A) = -2 \neq 0$

$\boxed{\text{Comme dét}(A) \neq 0 \text{ ; on déduit que que } A \text{ est inversible.}}$

3 pts **2** Calculer A^{-1}.

On résout $Y = AX$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
Y = AX \quad & \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 4y = u \\ x + 2y = v \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 4y = u & (\times -1) \quad (\times 1) \\ x + 2y = v & (\times 2) \quad (\times -1) \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -u + 2v & (L_1 - 2L_2) \\ 2y = u - v & (L_1 - L_2) \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -u + 2v \\ y = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } A^{-1} \text{ est inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Exercice 2 — 7 points

On donne $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1 pt **1** Calculer QP. Que peut-on déduire ?

$$QP = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -3+3 \\ 2-2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$QP = I_2$, ce qui prouve que O et Q sont inverses l'une de l'autre.

2 pts **2** Montrer que que $A = PDQ$.

$$\begin{aligned} PDQ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+0 & 0+9 \\ 2+0 & 0+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4+9 & 12-18 \\ -2+3 & 6-6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a bien vérifié que $A = PDQ$.

4 pts **3** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nQ$. Montrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $A^n = PD^nQ$ ».

- ***Initialisation :***
  $A^0 = I_2$ et $PD^0Q = PI_2Q = PQ = I_2$
  Donc la propriété est vraie au rang 0.
- ***Hérédité :*** soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $A^k = PD^kQ$.(HR)

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \times A \\ &= PD^kQ \times PDQ \text{ d'après(HR) et l'égalité } A = PDQ \\ &= PD^kQPDQ \\ &= PD^kI_2DQ \text{ car } PQ = QP = I_2 \\ &= PD^kDQ \\ &= PD^{k+1}Q \end{aligned}$$

- ***Conclusion :*** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n, on a « $A^n = PD^nQ$ ».

Exercice 3 — 4 points

On considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 5x - y = -\dfrac{17}{2} \\ -2x + 3y = 10 \end{cases}$$

1 pt **1** En posant $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et B une matrice 2×1 à déterminer, montrer soigneusement que le système (S) est équivalent à l'égalité $AX = B$.

$$\begin{cases} 5x - y = -\dfrac{17}{2} \\ -2x + 3y = 10 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{17}{2} \\ 10 \end{pmatrix}$$

le système (S) s'écrit $AX = B$ où $B = \begin{pmatrix} -\dfrac{17}{2} \\ 10 \end{pmatrix}$

1 pt **2** Calculer A^{-1} à l'aide de la calculatrice.

$$\boxed{\text{Avec une calculatrice, on obtient } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}}$$

1 pt **3** Montrer que $X = A^{-1}B$.

$$\begin{aligned} AX = B &\iff A^{-1}AX = A^{-1}B \\ &\iff I_2X = A^{-1}B \\ &\iff X = A^{-1}B \end{aligned}$$

1 pt **4** En déduire la résolution de (S).

$$\begin{aligned} (S) &\iff AX = B \\ &\iff X = A^{-1}B \\ &\iff X = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{17}{2} \\ 10 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{51}{26} + \frac{10}{13} \\ -\frac{17}{13} + \frac{50}{13} \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{31}{26} \\ \frac{33}{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{31}{26}; \frac{33}{13}\right)\right\}}$$

Exercice 4 Bonus — 3 points

3 pts Soit X et Y deux matrices carrées non nulles de même taille à coefficients réels, montrer que si $XY = 0$(la matrice nulle), alors les matrices X et Y ne sont pas inversibles.
On fait un raisonnement par l'absurde :

- Si X était inversible alors on aurait $X^{-1}(XY) = (X^{-1}X)Y = Y = 0$
  Ainsi Y serait la matrice nulle, ce qui est exclus.
- Si Y était inversible alors on aurait $(XY)Y^{-1} = X(YY^{-1}) = X = 0$
  Ainsi X serait la matrice nulle, ce qui est exclus.