Nom :	DS 07	TSTI2D1	Fév. 2022
Prénom :		Devoir nº 07	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 4 points

4 pts

Relevez et complétez le tableau ci-dessous :

Enoncé	Forme résolue	a	Solution générale
$y' = 3y$	$y' = 3y$	3	$y = Ce^{3x}, C \in \mathbb{R}$
$2y' + 5y = 0$	$y' = -\frac{5}{2}y$	$-\frac{5}{2}$	$y = Ce^{-\frac{5}{2}x}, C \in \mathbb{R}$

Exercice 2 — 4 points

4 pts

Relevez et complétez le tableau ci-dessous :

Enoncé	Forme résolue	a	b	Solution générale
$y' = 2y + 3$	$y' = 2y + 3$	2	3	$y = -\frac{3}{2} + Ce^{2x}, C \in \mathbb{R}$
$3y' - 2y = 6$	$y' = \frac{2}{3}y + 2$	$\frac{2}{3}$	2	$y = -3 + Ce^{\frac{2}{3}x}, C \in \mathbb{R}$

Exercice 3 — 4 points

On considère l'équation différentielle (E) :$y' - 4y = 2$

2 pts **1** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y' - 4y = 2$.

on sait que les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonctions $y = -\dfrac{b}{a} + Ce^{ax}$.

$y' - 4y = 2$ s'écrit $y' = 4y + 2$, elle donc de la forme $y' = ay + b$ où $a = 4$ et $b = 2$, ainsi $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{y(x) = Ce^{4x} - \frac{1}{2} \text{ sont les solutions de (E).}}$$

1 pt **2** Vérifier que $y(x) = Ce^{4x} - \dfrac{1}{2}$ est solution de (E).

On calcule $y'(x) = 4Ce^{4x}$ et donc $y' - 4y = 4Ce^{4x} - 4\left(Ce^{4x} - \dfrac{1}{2}\right) = 4Ce^{4x} - 4Ce^{4x} + 2 = 2$.

$$\boxed{y(x) = Ce^{4x} - \frac{1}{2} \text{ est bien solution de (E)}}$$

1 pt **3** Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $(0;-1)$. f est une solution de (E) donc $f(x) = Ce^{4x} - \dfrac{1}{2}$

$(0;-1) \in C_f \iff f(0) = -1 \iff Ce^0 - \dfrac{1}{2} = -1 \iff C = -1 + \dfrac{1}{2} \iff C = -\dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\text{La solution cherchée est définie par } f(x) = -\frac{1}{2}e^{4x} - \frac{1}{2}}$$

Exercice 4 **10 points**

PARTIE A

2 pts **1** On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + 100y = 8.$$

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).

on sait que les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonctions $y = -\frac{b}{a} + Ce^{ax}$.

$y' + 100y = 8$ s'écrit $y' = -100y + 8$, elle donc de la forme $y' = ay + b$ où $a = -100$ et $b = 8$, ainsi $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{-100} = 0,08$

$$\boxed{y(t) = Ce^{-100t} - 0,08 \text{ sont les solutions de (E).}}$$

1 pt **2** Déterminer la solution v définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ de cette équation différentielle, qui vérifie la condition initiale $v(0) = 0$.

v est une solution de (E) donc $v(t) = Ce^{-100t} + 0,08$.

$$\begin{aligned} v(0) = 0 \quad &\iff Ce^{-100\times 0} + 0,08 = 0 \\ &\iff Ce^{0} + 0,08 = 0 \\ &\iff C + 0,08 = 0 \\ &\iff C = -0,08 \end{aligned}$$

la solution v définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ de cette équation différentielle, qui vérifie la condition initiale $v(0) = 0$ est définie par $v(t) = 0,08 - 0,08e^{-100t}$

PARTIE B

La fonction v déterminée à la question précédente modélise la vitesse (exprimée en m.s^{-1}) de chute d'une bille dans un liquide visqueux en fonction du temps t écoulé depuis le début de la chute (exprimé en s). On admet que :

$$v(t) = 0,08 - 0,08e^{-100t}$$

1 pt **1** Déterminer la vitesse, arrondie à $0,001$ m.s^{-1}, de la bille après $0,01$ seconde de chute.
On calcule

$$\begin{aligned} v(0,001) &= 0,08 - 0,08e^{-100\times 0,001} \\ &= 0,08 - 0,08e^{-0,1} \\ &\approx 0,008 \end{aligned}$$

la vitesse, arrondie à $0,001$ m.s^{-1}, de la bille après $0,01$ seconde de chute est environ 0,008 m.s^{-1}

2 pts **2** Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} (-100t) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ par composée } \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-100t} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-100t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} -0,08\mathrm{e}^{-100t} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0,08$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0,08$, suite à la chute de la bille dans ce liquide visqueux, la bille aura une vitesse limite de 0,08 m.s^{-1}

2 pts **3** Étudier le sens de variation de la fonction v.

✍ Calcul de la dérivée : $v(t) = 0,08 - 0,08e^{-100t}$

$$\begin{aligned} v'(t) &= -0,08\left(e^{-100t}\right)' \\ &= -0,08 \times (-100)e^{-100t} \\ &= 8e^{-100t} \end{aligned}$$

On a utilisé la formule de dérivation $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$

$$\boxed{v'(t) = 8e^{-100t}}$$

✍ Signe de la dérivée :
Comme 8> 0 et $e^{-100t} > 0$(la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$), on déduit par produit que $v'(t) > 0$;
la dérivée étant strictement positive, la fonction v est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

✍ Tableau de variation : On déduit le tableau de variations de v sur $[0;+\infty[$:

t	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$v'(t)$	$+$
Variations de v	0 $\nearrow$ 0.08

2 pts **4** Résoudre par le calcul, l'équation $v(t) = 0,05$.

$$\begin{aligned} v(t) = 0,05 &\iff 0,08 - 0,08e^{-100t} = 0,05 \\ &\iff -0,08e^{-100t} = -0,03 \\ &\iff e^{-100t} = \frac{-0,03}{-0,08} \\ &\iff e^{-100t} = \frac{3}{8} \\ &\iff \ln\left(e^{-100t}\right) = \ln\left(\frac{3}{8}\right) \\ &\iff -100t = \ln\left(\frac{3}{8}\right) \\ &\iff t = -\frac{\ln\left(\frac{3}{8}\right)}{100} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{l'équation } v(t) = 0,05 \text{ a une unique solution } t = -\frac{\ln\left(\frac{3}{8}\right)}{100} \approx 0,0098}$$