Nom :	DS 08	TSTI2D OISELET	Mars. 2023
Prénom :		Devoir n° 11	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.
Le candidat doit traiter 14 questions parmi les17 numérotées de 1 à 17.
Les questions sont indépendantes.

Le candidat choisit les 10 questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice. Seules ces questions sont évaluées.

Chacune d'elles est notée sur 2 points.

Traiter une question supplémentaire ne rapporte aucun point.

Exercice 1 — 2 points

2 pts

1 Montrer, en détaillant vos calculs, que :

$$\ln(2\,023) = \ln(7) + 2\ln(17).$$

2 Simplifier le nombre A ci-dessous en détaillant les calculs :

$$A = 4\ln\left(\mathrm{e}^3\right) - 2\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

Exercice 2 — 2 points

2 pts On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad 2y' + y = 0,$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1 Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

2 Le plan est muni d'un repère.
Déterminer la solution f de (E), dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans ce repère passe par le point A(0 ; 1).

Exercice 3 — 2 points

2 pts Soit g la fonction définie sur l?intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x).$$

1 On admet que g est dérivable sur l?intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x de l?intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

2 Montrer que la fonction g admet un minimum, dont on précisera la valeur exacte, sur l?intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 4 — 2 points

2 pts On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Question 1. On considère le nombre complexe $z_1 = \dfrac{1+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Calculer le module de z_1.
3. Calculer la forme algébrique de z_1^2.

Exercice 5 — 2 points

2 pts **Question 2.** Soit z_2 le nombre complexe défini par : $z_2 = 3 - 3\mathrm{i}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z_2.
2. Montrer que z_2^4 est un nombre réel que l'on déterminera.

Exercice 6 — 2 points

2 pts **Question 3.** On considère A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 3 - 2\mathrm{i}, \qquad z_B = -1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_C = 1 - 4\mathrm{i}.$$

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Exercice 7 — 2 points

2 pts **Question 4.** On considère l'équation différentielle

$$y' + 3y = 8$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Préciser l'expression de la solution f vérifiant $f(0) = 5$.

Exercice 8 — 2 points

2 pts **Question 5.** Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + 1.$$

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, et on note g' sa fonction dérivée.
   Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.
2. En déduire le sens de variation de g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 9 **2 points**

2 pts **Question 6.** On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

1. Calculer la limite de h en $-\infty$.
2. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

On admet que h est strictement décroissante sur l'intervalle $[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$ et que l'équation $h(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$ que l'on note α.

3. Recopier le programme ci-dessous et compléter les pointillés pour que la fonction `sol_bal` détermine une valeur approchée à 10^{-n} près de α par balayage.

```
from math import exp

def sol_bal(n)
  x = 2
  while ...> 0,1
    x = ...
  return x
```

Exercice 10 **2 points**

2 pts **Question 7**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-0,052x} = 0,01$.
   On donnera la valeur exacte de la solution.
2. Un signal de puissance initiale $P(0) = 5,25$ mW parcourt une fibre optique.
   La puissance du signal, exprimée en mW, lorsque celui-ci a parcouru une distance de x kilomètres depuis l'entrée est donnée par $P(x) = 5,25e^{-0,052x}$.
   Quelle est la distance parcourue par le signal lorsque celui-ci aura perdu 99 % de sa puissance ?
   On arrondira le résultat obtenu au kilomètre.

Exercice 11 **2 points**

2 pts **Question 8**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x - 4 - 5\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x+1)(2x-5)}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,5\,;\,10]$.
2. Montrer que f admet un minimum sur l'intervalle $[0,5\,;\,10]$ et préciser la valeur exacte de ce minimum.

Exercice 12 — **2 points**

2 pts **Question 9**

Rappel : Pour a et b deux réels, on a les formules suivantes : $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$ $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

La tension u aux bornes d'un générateur, exprimée en volt, dépendant du temps t, exprimé en seconde, est donnée à l'instant t par :

$$u(t)=150\cos(80t)-150\sin(80t).$$

1. Montrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $u(t)=150\sqrt{2}\cos\left(80t+\dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. En déduire la fréquence $f=\dfrac{\omega}{2\pi}$, exprimée en Hz, délivrée par le générateur, où ω désigne la pulsation.
   On arrondira le résultat à l'unité.

Exercice 13 — **2 points**

2 pts **Question 10**

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0;+\infty[$ par

$$p(x)=\frac{1}{1+e^{-0,2x}}$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0;+\infty[$.
3. Vérifier que pour tout réel $x\geq 0$, on a
$$p(x)=\frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$$

Exercice 14 — **2 points**

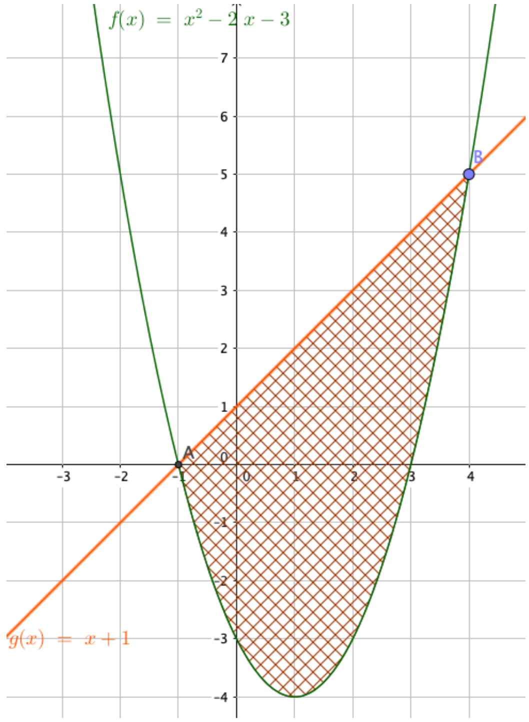
2 pts

Question 11

On considère les deux fonctions f et g définies et continues sur $[0\,;\,9]$ respectivement par :

$$f(x)=x^2-2x-3 \quad \text{et} \quad g(x)=x+1$$

Les représentations graphiques des deux fonctions sont données ci-dessous.



Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unité d'aire, située entre les courbes représentatives de ces deux fonctions. *Pour chaque question, préciser si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.*

Exercice 15 — 2 points

2 pts

Question 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t)$.
On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + y = 0$.

Affirmation 1 : « La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) et vérifie les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$. »

Exercice 16 — 2 points

2 pts **Question 13**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^x$.

Affirmation 2 : « La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. »

Exercice 17 — 2 points

2 pts **Question 14**

Le radon 220 est un élément radioactif qui se désintègre selon la loi : $N(t) = N(0)e^{-0{,}0133t}$ où $N(0)$ est le nombre de noyaux au début de l'observation et $N(t)$ le nombre de noyaux à l'instant t exprimé en secondes.
La demi-vie d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la moitié de ses noyaux se sont désintégrés.

Affirmation 3 : « La demi-vie du radon 220 est d'environ 52 secondes. »