Nom :	DS 08	TSTI2D Oiselet	Mars. 2023
Prénom :		Devoir n° 11	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.
Le candidat doit traiter 14 questions parmi les17 numérotées de 1 à 17.
Les questions sont indépendantes.

Le candidat choisit les 14 questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice. Seules ces questions sont évaluées.

Chacune d'elles est notée sur 2 points.

Traiter une question supplémentaire ne rapporte aucun point.

Exercice 1 — 2 points

2 pts

1 Montrer, en détaillant vos calculs, que :

$$\ln(2\,023) = \ln(7) + 2\ln(17).$$

$$\begin{aligned} \ln(7)+2\ln(17) &= \ln(7)+\ln\left(17^2\right) && \text{car } 2\ln(a)=\ln\left(a^2\right) \\ &= \ln(7)+\ln(289) \\ &= \ln(7\times 289) && \text{car } \ln(a)+\ln(b)=\ln(ab) \\ &= \ln(2023) \end{aligned}$$

2 Simplifier le nombre A ci-dessous en détaillant les calculs :

$$A = 4\ln\left(\mathrm{e}^3\right) - 2\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

$$\begin{aligned} 4\ln\left(\mathrm{e}^3\right)-2\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) &= 4\times 3-(-\ln(e)) && \text{car } \ln(e^t)=t \text{ et } \ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a) \\ &= 12+1 && \text{car } \ln(e)=1 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 4\ln\left(\mathrm{e}^3\right) - 2\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 13}$$

Exercice 2 — 2 points

2 pts On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad 2y' + y = 0,$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1 Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
(E) est de la forme $y' = ay$. (On isole y')

$$\begin{aligned} 2y'+y=0 &\iff 2y'=-y \\ &\iff y'=-\frac{1}{2}y \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation différentielle $2y' + y = 0$ sont donc les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

2 Le plan est muni d'un repère.
Déterminer la solution f de (E), dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans ce repère passe par le point A$(0\,;\,1)$.
$f(0) = 1 \iff k\mathrm{e}^0 = 1 \iff k = 1$

la solution f de (E), dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ passant par le point A$(0\,;\,1)$ est définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$

Exercice 3 — 2 points

2 pts Soit g la fonction définie sur l?intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x).$$

1 On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{x} \\ &= x - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x} \end{aligned}$$

2 Montrer que la fonction g admet un minimum, dont on précisera la valeur exacte, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On étudie les variations de la fonction g

- Signe de la dérivée :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de $(x-1)$		-		-		-	0	+	
signe de $x+1$		-	0	-		+		+	
signe de x		-		-	0	+		+	
signe de $\frac{(x-1)(x+1)}{x}$		-	‖	+	‖	-	0	+	

- On déduit le tableau de variation de g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de g	↘	$\frac{1}{2}$	↗

- Conclusion : La fonction g admet un minimum en $x=1$ qui vaut $g(1)=\dfrac{1}{2}1^2-\ln(1)=\dfrac{1}{2}$

Exercice 4 — *3 points*

3 pts On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On considère le nombre complexe $z_1=\dfrac{1+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

1 Déterminer la forme algébrique de z_1.
On cherche la forme algébrique de z_1.
$z_1=\dfrac{1+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+5\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{1+\mathrm{i}+5\mathrm{i}+5\mathrm{i}^2}{1^2+1^2}=\dfrac{-4+6\mathrm{i}}{2}=-2+3\mathrm{i}$

$$\boxed{\text{la forme algébrique de } z_1 \text{ est } z_1=-2+3\mathrm{i}.}$$

2 Calculer le module de z_1.

$$\begin{aligned}|z_1| &= \sqrt{a^2+b^2}\\ &= \sqrt{2^2+3^2}\\ &= \sqrt{13}\end{aligned}$$

$$\boxed{|z_1|=\sqrt{13}}$$

3 Calculer la forme algébrique de z_1^2.

$$\begin{aligned}z_1^2 &= (-2+3\mathrm{i})^2\\ &= 2^2+2\times(-2)\times3\mathrm{i}+(3\mathrm{i})^2\\ &= 4-12\mathrm{i}-9\\ &= -5-12\mathrm{i}\end{aligned}$$

$$\boxed{z_1^2=-5-12\mathrm{i}}$$

Exercice 5 — *3 points*

3 pts Soit z_2 le nombre complexe défini par : $z_2=3-3\mathrm{i}$.

1 Déterminer la forme exponentielle de z_2.

Module	**Argument**
$\begin{aligned}\lvert z_2\rvert &= \sqrt{a^2+b^2}\\ &= \sqrt{3^2+3^2}\\ &= \sqrt{18}\\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$	$\left\{\begin{aligned}\cos\theta=\tfrac{a}{r} &= \tfrac{3}{3\sqrt{2}}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\tfrac{b}{r} &= -\tfrac{3}{3\sqrt{2}}=-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right.$ Donc $\theta=-\frac{\pi}{4}$ convient

$$\boxed{z_2 = 3-3\text{i} = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}}$$

2 Montrer que z_2^4 est un nombre réel que l'on déterminera.

$$\begin{array}{ll|ll}
z_2^4 & = \left(z_2^2\right)^2 & z_2^4 & = (-18\text{i})^2 \\
z_2^2 & = (3-3\text{i})^2 & & = 324\text{i}^2 \\
 & = 3^2 - 2\times 3\times 3\text{i} + 9\text{i}^2 & & = -324 \\
 & = 9 - 18\text{i} - 9 & & \\
 & = -18\text{i} & &
\end{array}$$

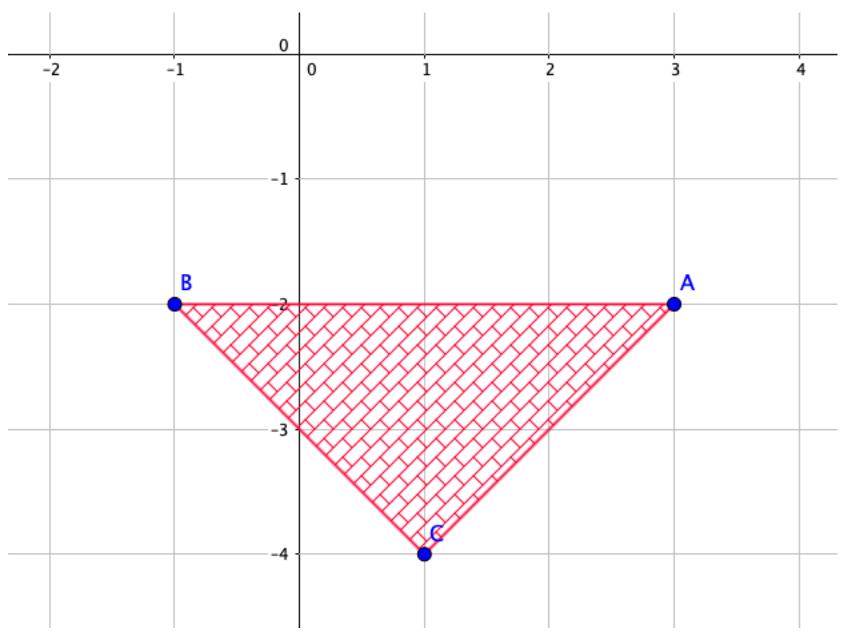
$$\boxed{z_2^4 = -324 \text{ et donc } z_2^4 \text{ est un nombre réel.}}$$

Exercice 6 — *3 points*

3 pts On considère A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 3-2\text{i}, \qquad z_B = -1-2\text{i} \quad \text{et} \quad z_C = 1-4\text{i}.$$

1 Placer les points A, B et C dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.



2 Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
On calcule les longueurs AB, BC et AC.

- $AB = |z_B - z_A| = |-1-2\text{i}-3+2\text{i}| = |-4| = 4$
- $BC = |z_C - z_B| = |1-4\text{i}+3+2\text{i}| = |2-2\text{i}| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $AC = |z_C - z_A| = |1-4\text{i}-3+2\text{i}| = |-2-2\text{i}| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

BC = AC donc le triangle ABC est isocèle.
$BC^2 + AC^2 = 8+8 = 16 = 4^2 = AB^2$ donc d'après la récirpoque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.

$$\boxed{\text{Donc le triangle ABC est isocèle rectangle en C.}}$$

Exercice 7 — 3 points

3 pts On considère l'équation différentielle

$$y' + 3y = 8$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1 Résoudre cette équation différentielle.
D'après le cours on sait que pour $a \neq 0$, les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = k\mathrm{e}^{-at} + \dfrac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$.

> Les solutions de l'équation différentielle $y' + 3y = 8$ sont donc les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = k\mathrm{e}^{-3t} + \dfrac{8}{3}$ où $k \in \mathbb{R}$.

2 Préciser l'expression de la solution f vérifiant $f(0) = 5$.
$f(0) = 5 \iff k\mathrm{e}^{0} + \dfrac{8}{3} = 5 \iff k = 5 - \dfrac{8}{3} \iff k = \dfrac{7}{3}$

Exercice 8 — 3 points

3 pts Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} + 1.$$

1 On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$.
g est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $g = u + v$ d'où $g' = u' + v'$
avec pour tout réel x, dans $]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{cases} u(x) &= \ln(x) \\ v(x) &= \dfrac{1}{x} + 1 \end{cases} \quad \text{ainsi : } \begin{cases} u'(x) &= \dfrac{1}{x} \\ v'(x) &= -\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x-1}{x^2} \end{aligned}$$

2 En déduire le sens de variation de g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On va déterminer les variations de la fonction g et, pour cela, étudier le signe de $g'(x)$.

x	0		1		$+\infty$
signe de $(x-1)$		-	0	+	
signe de x^2	0	+		+	
signe de $g'(x)$	||	-	0	+	

On déduit le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Exercice 9 — 3 points

3 pts On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

1 Calculer la limite de h en $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty\end{array}\right\} \text{ par composée } \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty\end{array}\right\} \text{ Par produit } \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty}$$

2 Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$. On peut écrire $h(x) = x \times \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} \times \mathrm{e}^{-x}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{d'après une limite de référence } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty \text{ par inverse } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0\end{array}\right\} \text{ Par produit } \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0}$$

On admet que h est strictement décroissante sur l'intervalle $[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$ et que l'équation $h(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$ que l'on note α.

3 Recopier le programme ci-dessous et compléter les pointillés pour que la fonction `sol_bal` détermine une valeur approchée à 10^{-n} près de α par balayage.

```
from math import exp

def sol_bal(n)
  x =0,5
  whilex*exp(-2*x) > 0,1
    x =x+10**(-n)
  return x
```

Exercice 10 — 3 points

3 pts

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-0,052x} = 0,01$.
On donnera la valeur exacte de la solution.
On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-0,052x} = 0,01$.

$$e^{-0,052x} = 0,01 \iff -0,052x = \ln(0,01) \iff x = -\frac{\ln(0,01)}{0,052}$$

$\boxed{-\dfrac{\ln(0,01)}{0,052} \text{ est l'unique solution de cette équation.}}$

2 Un signal de puissance initiale $P(0) = 5,25$ mW parcourt une fibre optique.
La puissance du signal, exprimée en mW, lorsque celui-ci a parcouru une distance de x kilomètres depuis l'entrée est donnée par $P(x) = 5,25e^{-0,052x}$.
Quelle est la distance parcourue par le signal lorsque celui-ci aura perdu 99 % de sa puissance ?
Le signal aura perdu 99 % de sa puissance pour une distance x telle que $P(x) = P(0) \times \left(1 - \dfrac{99}{100}\right)$ donc pour $P(x) = 5,25 \times 0,01$.
$P(x) = 5,25 \times 0,01 \iff 5,25e^{-0,052x} = 5,25 \times 0,01 \iff e^{-0,052x} = 0,01 \iff x = -\dfrac{\ln(0,01)}{0,052}$ ce qui donne environ 89 km.

$\boxed{\text{Le signal aura perdu 99 \% de sa puissance pour une distance d'environ 89 km.}}$

Exercice 11 — 3 points

3 pts

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 10] par :

$$f(x) = x^2 - 3x - 4 - 5\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.

1 Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x+1)(2x-5)}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle [0,5 ; 10].
Pour tout x appartenant à l'intervalle [0,5 ; 10] : $f'(x) = 2x - 3 - 0 - 5 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - x - 5}{x}$
Or $(x+1)(2x-5) = 2x^2 + 2x - 5x - 5 = 2x^2 - 3x - 5$

$\boxed{\text{donc } f'(x) = \dfrac{(x+1)(2x-5)}{x}.}$

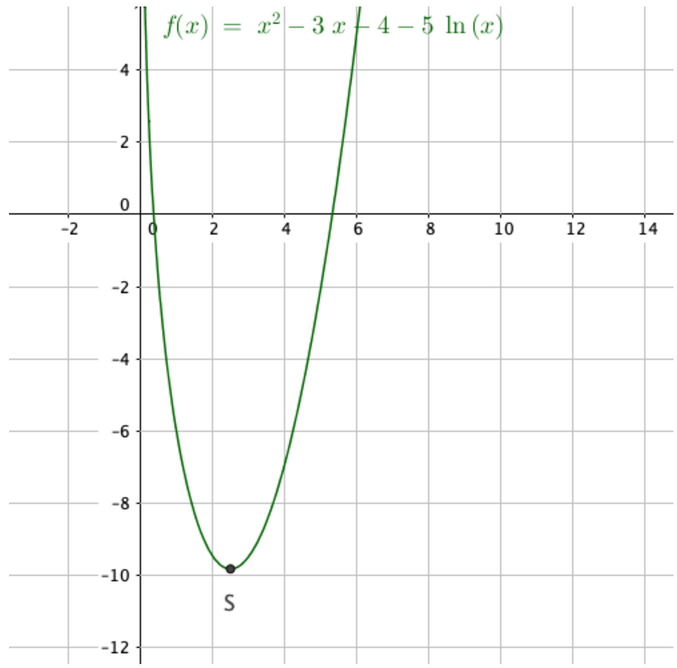
2 Montrer que f admet un minimum sur l'intervalle [0,5 ; 10] et préciser la valeur exacte de ce minimum.
On va déterminer les variations de la fonction f et, pour cela, étudier le signe de $f'(x)$.

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
signe de $(x+1)$		+		+	
signe de $2x-5$		-	0	+	
signe de x	0	+		+	
signe de $f'(x)$	||	-	0	+	

On déduit le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$:

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$-5.25-5\ln(2.5)$	↗	$+\infty$

La fonction f admet donc un minimum en $x = 2,5$ qui vaut
$f(1,5) = 2,5^2 - 7,5 - 4 - 5\ln(2,5) = -5,25 - 5\ln(5,5)$.



Exercice 12 **3 points**

3 pts

Rappel : Pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

La tension u aux bornes d'un générateur, exprimée en volt, dépendant du temps t, exprimé en seconde, est donnée à l'instant t par :

$$u(t) = 150\cos(80t) - 150\sin(80t).$$

1 Montrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $\quad u(t) = 150\sqrt{2}\cos\left(80t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$$\begin{aligned} 150\sqrt{2}\cos\left(80t + \frac{\pi}{4}\right) &= 150\sqrt{2}\left(\cos(80t)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \sin(80t)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 150\sqrt{2}\left(\cos(80t)\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(80t)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= 150\cos(80t) - 150\sin(80t)$$

$$= u(t)$$

2 En déduire la fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$, exprimée en Hz, délivrée par le générateur, où ω désigne la pulsation.
On arrondira le résultat à l'unité.
On déduit de la question précédente que la pulsation ω est égale à 80 et que la fréquence f est égale à

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{80}{2\pi} \approx 13$$

Exercice 13 — *3 points*

3 pts

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0;+\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}}$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1 Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
On calcule $p(10) = \dfrac{1}{1+e^{-0,2\times 10}} = \dfrac{1}{1+e^{-2}} \approx 0,88$

$$\boxed{\text{Pour ce modèle, 88\% des individus seraient équipés au 1er janvier 2010.}}$$

2 Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0;+\infty[$.
On calcule la dérivée et on étudie son signe.Comme $p = \dfrac{1}{u}$; on a $p' = -\dfrac{u'}{u^2}$.
Ici $u = 1+e^{-0,2x}$, donc $u' = -0,2e^{0,2x}$. On a utilisé la formule $(e^u)' = u'e^u$.

$$\boxed{p'(x) = -\frac{0,2e^{0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2}}$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de -0.2	-
signe de $e^{0,2x}$	+
signe de $(1+e^{-0,2x})^2$	+
signe de $p'(x)$	-

On déduit le tableau de variations de p sur $[0;+\infty[$:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$p'(x)$	$-$
Variations de p	$0.5 \nearrow 1$

3 Vérifier que pour tout réel $x \geq 0$, on a

$$p(x) = \frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{1+e^{-0,2x}} \\ &= \frac{1 \times e^{0,2x}}{(1+e^{-0,2x}) \times e^{0,2x}} \\ &= \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x}+e^{0}} \\ &= \frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}} \end{aligned}$$

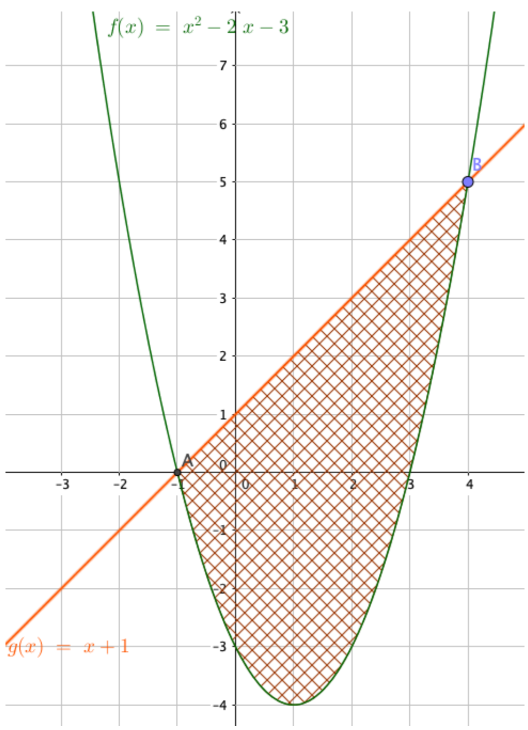
Exercice 14 — *2 points*

2 pts

On considère les deux fonctions f et g définies et continues sur $[0\,;9]$ respectivement par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad \text{et} \quad g(x) = x + 1$$

Les représentations graphiques des deux fonctions sont données ci-dessous.



Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unité d'aire, située entre les courbes représentatives de ces deux fonctions.
L'aire hachurée est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-1}^{4} (g(x) - f(x))\, dx \\
h(x) &= g(x) - f(x) \\
&= x + 1 - (x^2 - 2x - 3) \\
&= x + 1 - x^2 + 2x + 3 \\
&= -x^2 + 3x + 4 \\
H \text{ une primitive de } h & \\
H(x) &= -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x \\
\mathcal{A} &= H(4) - H(1) \\
H(4) &= -\frac{4^3}{3} + 3\frac{4^2}{2} + 4 \times 4 = \frac{56}{3} \\
H(-1) &= -\frac{(-1)^3}{3} + 3\frac{(-1)^2}{2} + 4 \times (-1) = -\frac{13}{6} \\
\mathcal{A} &= \frac{56}{3} + \frac{13}{6} = \frac{125}{6}
\end{aligned}$$

la valeur exacte de l'aire, exprimée en unité d'aire, située entre les courbes représentatives de ces deux fonctions est de $\frac{125}{6}$ u.a.

Pour chaque question, préciser si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Exercice 15 — 2 points

2 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t)$.
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.

Affirmation 1 :
« La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) et vérifie les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$. »

- Déjà $f(t) = 2\cos(t) + 3\sin(t)$, donc $f(0) = 2\cos(0) + 3\sin(0) = 2 \times 1 + 3 \times 0 = 2$. La condition $y(0) = 2$ est vérifiée.
- On calcule la dérivée : $f'(t) = 2 \times (-\sin t) + 3 \times \cos t$, donc $f(0) = 2 \times (-\sin 0) + 3 \times \cos 0 = 0 + 3 = 3$. La condition $y'(0) = 3$ est vérifiée.
- On calcule la dérivée seconde :

  $f''(t) = 2 \times (-\cos t) + 3 \times (-\sin t) = -2\cos t - 3\sin t$
  On reporte dans l'équation différentielle :

  $$\begin{aligned}
  f''(t) + f(t) &= -2\cos t - 3\sin t + 2\cos(t) + 3\sin(t) \\
  &= 0
  \end{aligned}$$

  f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E)

Affirmation 1 vraie

Exercice 16 — 2 points

2 pts

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)e^x$.

Affirmation 2 :
« La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. »

On calcule la dérivée et on étudie son signe :
f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.

$f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, $\begin{cases} u(x) & = 2x+1 \\ v(x) & = e^x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) & = 2 \\ v'(x) & = e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) & = 2e^x + e^x(2x+1) \\ & = e^x(2x+1+2) \\ & = e^x(2x+3) \end{aligned}$$

On déduit le tableau de variations de f sur $]-\infty;+\infty[$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	↘		↗	$+\infty$

f est décroissante sur $]-\infty;-\frac{3}{2}]$.
Affirmation 2 fausse

Exercice 17 *2 points*

2 pts

Le radon 220 est un élément radioactif qui se désintègre selon la loi :
$N(t) = N(0)e^{-0{,}0133t}$ où $N(0)$ est le nombre de noyaux au début de l'observation et $N(t)$ le nombre de noyaux à l'instant t exprimé en secondes.
La demi-vie d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la moitié de ses noyaux se sont désintégrés.

Affirmation 3 :
« La demi-vie du radon 220 est d'environ 52 secondes. »

On cherche $t_{0,5}$ tel que $N(t_{0,5}) = \dfrac{1}{2}N(0)$ soit $N(0)\mathrm{e}^{-0{,}0133t_{0,5}} = \dfrac{1}{2}N(0)$ ou $\mathrm{e}^{-0{,}0133t_{0,5}} = \dfrac{1}{2}$.

On résout cette équation : $\mathrm{e}^{-0{,}0133t_{0,5}} = \dfrac{1}{2} \iff -0{,}0133t_{0,5} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff t_{0,5} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}0133}$

Donc $t_{0,5} \approx 52{,}1$.
Affirmation 3 vraie