Nom : .... *Prénom :*	**DS 04**	TSTI2D OISELET *Déc. 2022* *Devoir n° 08* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 5 points

Je connais mon cours !

1 pt **1** Donner la dérivée de $f(x) = \ln x$:

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

2 pts **2** Compléter les formules suivantes :

- $\ln 1 = 0$
- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2} \ln a$

2 pts **3** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(3x+1) = \ln 2$

- L'équation a un sens ssi $3x+1 > 0$

$$\begin{aligned} 3x+1 > 0 &\iff 3x > -1 \\ &\iff x > -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$D = \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

- Sur D, on a :

$$\begin{aligned} \ln(3x+1) = \ln 2 &\iff 3x+1 = 2 \\ &\iff 3x = 1 \\ &\iff x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- Comme $\frac{1}{3} \in D$, $\frac{1}{3}$ est solution.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$$

Exercice 2 — 4 points

4 pts Calculer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :

- $A = \ln(36)$
- $B = \ln(24) + \ln\sqrt{18}$
- $C = \ln\left(3^4 \times 2^7\right)$
- $D = \ln\left(\frac{3^5}{2^6}\right)$

$$\begin{aligned} A &= \ln(36) \\ &= \ln(6^2) \\ &= 2\ln 6 \\ &= 2(\ln(2\times 3)) \\ &= 2(\ln(2+\ln 3)) \\ &= 2\ln 2 + 2\ln 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \ln\sqrt{18} \\ &= \frac{1}{2}\ln(18) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(2\times 3^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(2)+\ln\left(3^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}(\ln(2)+2\ln(3)) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 + \ln 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \ln\left(3^4\times 2^7\right) \\ &= \ln\left(3^4\right)+\ln\left(2^7\right) \\ &= 4\ln 3 + 7\ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \ln\left(\frac{3^5}{2^6}\right) \\ &= \ln\left(3^5\right)-\ln\left(2^6\right) \\ &= 5\ln 3 - 6\ln 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 2\ln 2+2\ln 3; B = \frac{1}{2}\ln 2+\ln 3; C = 4\ln 3+7\ln 2; D = 5\ln 3-6\ln 2}$$

Exercice 3 — 3 points

3 pts Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- $f(x) = \ln x + x^2 - 3x$
  f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $f = u+v$ d'où $f' = u'+v'$ avec pour tout réel x, dans $]0;+\infty[$: $\begin{cases} u(x) &= \ln x \\ v(x) &= x^2-3x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v'(x) &= 2x-3 \end{cases}$
  Alors $f'(x) = \frac{1}{x}+2x-3 = \frac{1+x(2x-3)}{x} = \frac{2x^2-3x+1}{x}$
- $g(x) = x\ln x$

  g est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $g = uv$, d'où $g' = u'v+v'u$ avec pour tout réel x, dans $]0;+\infty[$: $\begin{cases} u(x) &= x \\ v(x) &= \ln x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= \frac{1}{x} \end{cases}$

  $$\begin{aligned} g'(x) &= 1\times\ln x + \frac{1}{x}\times x \\ &= \ln x + 1 \end{aligned}$$

- $h(x) = \ln(2x+1)$
  $h = \ln u$, donc $h' = \frac{u'}{u}$, ainsi on obtient : $h'(x) = \frac{2}{2x+1}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x}\ ; g'(x) = \ln x + 1\ ; h'(x) = \frac{2}{2x+1}}$$

Exercice 4 — 4,5 points

4.5 pts Calculer la dérivée des fonctions suivantes

- $f(x) = \sin(2x+3)$
  On utilise $(\sin(u))' = u'\cos(u)$

$$\boxed{f'(x) = 2\cos(2x+3)}$$

- $g(x) = (x^2 + 3x + 1)^3$
  On utilise $\left(u^3\right)' = 3u^2u'$

$$\boxed{g'(x) = 3(x^2 + 3x + 1)^2(2x + 3)}$$

- $h(x) = \sqrt{2x + 1}$
  On utilise $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$\boxed{h'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}$$

Exercice 5 — 9,5 points

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x + \dfrac{4}{x} - 5$. On note C la représentation graphique de la onction f.

1.5 pt **1** **a.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} - 5 = -5 \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

0.5 pt **b.** On admet que $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à C.

1 pt **2** **a.** Pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, vérifier que $f'(x) = \dfrac{2x-4}{x^2}$.
f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.

$f = u+v$ d'où $f' = u'+v'$ avec pour tout réel x, dans $]0;+\infty[$: $\begin{cases} u(x) &= 2\ln x \\ v(x) &= \dfrac{4}{x} - 5 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 2 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x} \\ v'(x) &= 4 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{4}{x^2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) + v'(x) \\ &= \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{2x}{x^2} - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{2x-4}{x^2} \end{aligned}$$

1.5 pt **b.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
signe de $(2x-4)$		-	0	+	
signe de x^2	0	+		+	
signe de $f'(x)$	||	-	0	+	

1 pt **c.** Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

✏ $f'(1) = \dfrac{2\times 1 - 4}{1^2} = -\dfrac{2}{1} = -2$

✏ $f(1) = 2\ln 1 + 4 - 5 = -1$ car $\ln 1 = 0$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = -2(x-1) - 1, \text{ soit } y = -2x + 1}$$

1 pt **3** Établir le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
On déduit le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	$2\ln 2 - 3$	↗	$+\infty$

$$f(2) = 2\ln 2 + 2 - 5 = 2\ln 2 - 3$$

1 pt **4** En précisant votre démarche, donner le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$, pour x appartenant à $]0;+\infty[$.
Le minimum de la fonction f est $f(2) = 2\ln 2 + 2 - 5 = 2\ln 2 - 3 \approx -1{,}6$ D'après le tableau des variations de la fonction f, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions.

0.5 pt **5** **a.** Donner le signe de $f(x)$ pour x appartenant à $[1;3]$.

- Sur l'intervalle $]0;2]$ la fonction f est strictement décroissante et $f(1) = -1$; donc pour tout réel x appartenant à $[1;2]$; on a $f(x) \leq 0$.
- Sur l'intervalle $[2;+\infty[$ la fonction f est strictement croissante et $f(3) \approx -1{,}47$; donc pour tout réel x appartenant à $[2;3]$; on a $f(x) \leq 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ appartenant à } [1;3] \text{ ; on a } f(x) \leq 0.}$$