

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1

3 points

Je connais mon cours!

1 pt **1** Donner la dérivée de $f(x) = e^x$:

Si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$

2 pts **2** Complétons les formules suivantes :

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $e^0 = 1$ • $e^{x+y} = e^x \times e^y$ | <ul style="list-style-type: none"> • $(e^x)^n = e^{nx}$ • $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ |
|---|---|

Exercice 2 : Equations

4 points

2 pts **1** Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $e^x \times e^{-4} = (e^x)^4$.

$$\begin{aligned}
 e^x \times e^{-4} = (e^x)^4 &\iff e^{x-4} = e^{4x} \\
 &\iff x - 4 = 4x \\
 &\iff -3x = 4 \\
 &\iff x = -\frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

$S = \left\{ -\frac{4}{3} \right\}$

2 pts **2** $e^{3x^2} = e^{2x+1}$.

$$\begin{aligned}
 e^{3x^2} = e^{2x+1} &\iff 3x^2 = 2x + 1 \\
 &\iff 3x^2 - 2x - 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$$

x_1	$= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	x_2	$= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
	$= \frac{2+4}{6}$		$= \frac{2-4}{6}$
	$= 1$		$= -\frac{1}{3}$

$S = \left\{ 1; -\frac{1}{3} \right\}$

Exercice 3 : Inéquations

5 points

Résoudre les inéquations :

1.5 pt **1** $e^x > e^{1-x}$

$$\begin{aligned}
 e^x > e^{1-x} &\iff x > 1-x \\
 &\iff 2x > 1 \\
 &\iff x > \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$S = \left] \frac{1}{2}; +\infty[\right]$$

1.5 pt **2** $e^x - \frac{1}{e^x} > 0$

$$\begin{aligned}
 e^x - \frac{1}{e^x} > 0 &\iff e^x > \frac{1}{e^x} \\
 &\iff e^x > e^{-x} \\
 &\iff x > -x \\
 &\iff 2x > 0 \\
 &\iff x > 0
 \end{aligned}$$

$$S =]0; +\infty[$$

2 pts **3** Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $(2e^x + 14)(x - 3) \leq 0$.

On étudie le signe de chaque facteur du produit et n fait le bilan dans un tableau de signes :

↯ Pour tout réel x on a $e^x > 0$, donc $2e^x > 0$, puis $2e^x + 14 > 14 > 0$.

Ainsi pour tout réel x ; $2e^x + 14$ est strictement positif.

↯ $x - 3 > 0 \iff x > 3$

↯ On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de ($2e^x + 14$)	+		+
signe de $x - 3$	-	0	+
signe de $f(x)$	-	0	+

On lit l'ensemble des solutions sur le tableau précédent :

$$S =]-\infty; 3]$$

Exercice 4

6 points

6 pts Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = e^{-x+7} \times e^{-4x+6} \quad B = e^{(x+1)^2} \times e \quad C = (e^{x+1})^2 \times e$$

$$D = \frac{e^{3x-4}}{e^{-3x+4}} \quad E = e^{-5} \times e^{-3x+4} \times e^2 \quad F = (e^{-3})^2 \times e^{2x+2} \times \frac{1}{e^4}$$

$$\begin{array}{l}
 A = e^{-x+7} \times e^{-4x+6} \\
 = e^{-x+7-4x+6} \\
 = e^{-5x+13} \\
 D = \frac{e^{3x-4}}{e^{-3x+4}} \\
 = e^{3x-4-(-3x+4)} \\
 = e^{6x-8}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 B = e^{(x+1)^2} \times e \\
 = e^{x^2+2x+1+1} \\
 = e^{x^2+2x+2} \\
 E = e^{-5} \times e^{-3x+4} \times e^2 \\
 = e^{-5-3x+4+2} \\
 = e^{-3x+1}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 C = (e^{x+1})^2 \times e \\
 = e^{2(x+1)} \times e^1 \\
 = e^{2x+3} \\
 F = (e^{-3})^2 \times e^{2x+2} \times \frac{1}{e^4} \\
 = e^{-6+2x+2-4} \\
 = e^{2x-8}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 A = e^{-5x+13} & B = e^{x^2+2x+2} & C = e^{2x+3} \\
 D = e^{6x-8} & E = e^{-3x+1} & F = e^{2x-8}
 \end{array}$$

Exercice 5

3 points

3 pts Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1 $f(x) = x^2 - 3x + e^{-x}$

2 $g(x) = xe^x$

3 $h(x) = e^{2x+1}$

1 $f(x) = 5x^2 + 3x + 1 - 2e^x$

$$f'(x) = 10x + 3 - 2e^x$$

2 $g(x) = (2x + 1)e^x$ g est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.

$$g = uv, \text{ d'où } g' = u'v + v'u \text{ avec pour tout réel } x, \text{ dans } \mathbb{R} : \begin{cases} u(x) = 2x + 1 \\ v(x) = e^x \end{cases} \text{ ainsi : } \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 2e^x + (2x + 1)e^x \\
 &= (2 + 2x + 1)e^x
 \end{aligned}$$

$$g'(x) = (2x + 3)e^x$$

3 $h(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$ h est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$h = \frac{u}{v} \text{ d'où } h' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \text{ avec pour tout réel } x, \text{ dans } \mathbb{R} : \begin{cases} u(x) = e^x - 1 \\ v(x) = 2e^x + 1 \end{cases} \text{ ainsi : } \begin{cases} u'(x) = e^x \\ v'(x) = 2e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{e^x(2e^x + 1) - 2e^x(e^x - 1)}{(2e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{e^x(2e^x + 1 - 2(e^x - 1))}{(2e^x + 1)^2} \\
 &= \frac{e^x(2e^x + 1 - 2e^x + 2)}{(2e^x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$h'(x) = \frac{3e^x}{(2e^x + 1)^2}$$

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (1 - x)e^x + 1$.

1.5 pt **1** Montrer que pour tout réel x de $[0; +\infty[$ on a : $f'(x) = -xe^x$

↳ Dérivée : f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $f = uv + 1$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec

$$\text{pour tout réel } x, \text{ dans } D_f : \begin{cases} u(x) = 1 - x \\ v(x) = e^x \end{cases} \text{ ainsi : } \begin{cases} u'(x) = -1 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \times e^x + e^x \times (1 - x) \\ &= e^x(-1 + 1 - x) \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

$$f'(x) = -xe^x$$

1.5 pt **2** Étudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .

↳ Signe de la dérivée : la fonction exponentielle étant strictement positive sur \mathbb{R} , on déduit que $f'(x)$ a le signe de $-x$.

$$\begin{array}{l} f'(x) = 0 \iff -x = 0 \\ \iff x = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} g'(x) > 0 \iff -x > 0 \\ \iff x < 0 \end{array} \right.$$

↳ La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$

↳ La fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

1 pt **3** Donner le tableau de variations de f . On déduit le tableau de variations de f sur $]-\infty; +\infty[$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de f			

$$f(0) = 1 + e^0 = 2$$

1 pt **4** Donner une équation de T la tangente à C_f la courbe de f au point d'abscisse 1.

T a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$\Leftrightarrow f'(1) = -e^1 = -e$$

$$\Leftrightarrow f(1) = (1 - 1)e^1 + 1 = 1$$

$$T \text{ a pour équation } y = -e(x - 1) + 1, \text{ soit } y = -ex + e + 1$$