

Nom : .....	<b>DS 02</b>	<b>TST2D</b> <b>OISELET</b>	Oct. 2022
Prénom : .....		Devoir n° 04	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**  
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

**Attention! Le sujet est recto-verso.**

**Exercice 1**

*4 points*

4 pts Je connais mon cours!  
Recopiez et complétez sur votre copie :

- 1**  $a^0 = 1$  et  $a^1 = a$
- 2**  $a^{x+y} = a^x \times a^y$
- 3**  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- 4**  $(a^x)^n = a^{nx}$ , avec  $n$  un entier relatif.
- 1**  $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$ ;
- 2**  $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$ ;
- 3**  $\log(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \log(x)$ ;
- 4**  $\log(x^n) = n \log(x)$  pour  $n \in \mathbb{N}$

**Exercice 2**

*4 points*

4 pts Simplifier les expressions suivantes :

- 1**  $A = 13^{-4} \times 13^{1,5} = 13^{-4+1,5} = 13^{-2,5}$
- 2**  $B = \frac{0,2^{2,3}}{0,2^{1-3x}} = 0,2^{2,3-(1-3x)} = 0,2^{2,3-1+3x} = 0,2^{3x+1,3}$
- 3**  $B = \frac{(3^{4,5})^3}{3^5} = \frac{3^{4,5 \times 3}}{3^5} = 3^{13,5-5} = 3^{8,5}$
- 4**  $B = \frac{(5^{5x+2})^5 \times 5^{7x-19}}{(5^{-2x+8})^{-2}} = \frac{5^{5(5x+2)+7x-19}}{5^{-2(-2x+8)}} = \frac{5^{25x+10+7x-19}}{5^{4x-16}} = \frac{5^{32x-9}}{5^{4x-16}} = 5^{32x-9-(4x-16)} = 5^{32x-9-4x+16} = 5^{28x+7}$

**Exercice 3**

*4,5 points*

2 pts **1** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $3 \times 2,1^n \geq 14$

2.5 pts **2** On donne les étapes de résolution d'une inéquation. Justifier et compléter chacune des étapes

$$\begin{aligned} 100 \times 0,8^n \geq 25 &\iff 0,8^n \geq \frac{25}{100} && \text{en divisant par } 100 > 0 \\ &\iff 0,8^n \geq \frac{1}{4} && \text{en simplifiant} \\ &\iff \log(0,8^n) \geq \log\left(\frac{1}{4}\right) && \text{en appliquant la fonction log} \\ &&& \text{strictement croissante sur } ]0; +\infty[ \\ &\iff n \log(0,8) \geq -\log(4) && \text{en utilisant les propriétés } \log(x^n) = n \log(x) \\ &&& \text{et } \log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a) \\ &\iff n \leq -\frac{\log(4)}{\log(0,8)} && \text{en divisant par } \log(0,8) < 0 \end{aligned}$$

**Exercice 4**

2 points

2 pts Ecrire sous forme d'un nombre décimal

- 1**  $A = \log(10^3) = 3$  car  $\log(10^x) = x$
- 2**  $A = \log(10^{-4}) = -4$
- 3**  $A = \log(0,01) = \log(10^{-2}) = -2$
- 4**  $A = \log(1000000) = \log(10^6) = 6$

**Exercice 5**

2 points

2 pts Exprimer en fonction de  $\log(a)$  et  $\log(b)$  les nombres suivants :  $A = \log(a^2 \times b^3)$  et  $B = \log\left(\frac{a^3}{b^4}\right)$

$$\begin{array}{l|l} A = \log(a^2 \times b^3) & B = \log\left(\frac{a^3}{b^4}\right) \\ = \log(a^2) + \log(b^3) & = \log(a^3) - \log(b^4) \\ = 2\log(a) + 3\log(b) & = 3\log(a) - 4\log(b) \end{array}$$

$$A = 2\log(a) + 3\log(b), B = 3\log(a) - 4\log(b)$$

**Exercice 6**

3 points

3 pts Ecrire les nombres suivants sous la forme  $a \log(2)$  où  $a$  est un réel :

- 1**  $A = \log(16) = \log(2^4) = 4\log(2)$
- 2**  $B = \log(32) + \log(2) = \log(2^5) + \log(2) = 5\log(2) + \log(2) = 6\log(2)$
- 3**  $C = \log(24) - \log(96) = \log(2^3 \times 3) - \log(2^5 \times 3) = \log(2^3) + \log(3) - (\log(2^5) + \log(3)) = 3\log(2) + \log(3) - 5\log(2) - \log(3) = -2\log(2)$

$$A = 4\log(2), B = 6\log(2), C = -2\log(2)$$

**Exercice 7**

4,5 points

4.5 pts On place une somme de 2 000 euros à intérêts composés au taux annuel de 5,5 %. Les trois affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera les réponses.

- 1** La somme disponible dans 5 ans est  $2000 \times 1,055 \times 5$ .  
Faux, la somme disponible au bout de 5 ans est  $S = 2000 \times 1,055^5$ .
- 2** Pour déterminer l'année à partir de laquelle la somme aura doublé, on peut résoudre l'équation :  $1,055^n = 2$ .  
Vrai, la somme aura doublé lorsque  $2000 \times 1,055^5 = 4000$  soit  $1,055^n = 2$ .
- 3** La solution de l'équation précédente est  $\log\left(\frac{2}{1,055}\right)$ .  
On résout l'équation :  $1,055^n = 2$ .

$$\begin{aligned} 1,055^n = 2 &\iff \log(1,055^n) = \log(2) \\ &\iff n \log(1,055) = \log(2) \\ &\iff n = \frac{\log(2)}{\log(1,055)} \end{aligned}$$

$$\frac{\log(2)}{\log(1,055)} \approx 12,94$$

Si on place une somme de 2 000 euros à intérêts composés au taux annuel de 5,5 %, le capital aura doublé au bout de 13 ans.

**Exercice 8**

5 points

5 pts

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- 1**  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$   
 $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

- 2**  $g(x) = -3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$   
 $g'(x) = -3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

$$g'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$$

- 3**  $h(x) = (x^2 - 3)(2\sqrt{x} + 4)$

$h$  est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.

$h = uv$ , d'où  $f' = u'v + v'u$  avec :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 - 3 \\ v(x) = 2\sqrt{x} + 4 \end{cases} \text{ ainsi : } \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x \times (2\sqrt{x} + 4) + \frac{1}{\sqrt{x}} \times (x^2 - 3) \\ &= 4x\sqrt{x} + 8x + \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \\ &= 4x\sqrt{x} + 8x + x\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$h'(x) = 3x\sqrt{x} + 8x - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$4 \quad j(x) = \frac{3x+1}{1-4x}$$

$$j = \frac{u}{v} \text{ d'où } f' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \text{ avec : } \begin{cases} u(x) = 3x+1 \\ v(x) = 1-4x \end{cases} \text{ ainsi : } \begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} j'(x) &= \frac{3(1-4x) - (-4)(3x+1)}{(1-4x)^2} \\ &= \frac{3-12x+12x+4}{(1-4x)^2} \\ &= \frac{7}{(1-4x)^2} \end{aligned}$$

$$j'(x) = \frac{7}{(1-4x)^2}$$