Nom :	**DS 01**	TSTI2D Oiselet — *Sept. 2022*
Prénom :		*Devoir n° 02* — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 Le cours — 4 points

4 pts Compléter les prhrases suivantes :

- Si (u_n) est une suite arithmétique alors le terme général est donné par :

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

- Si (u_n) est une suite arithmétique alors la somme S_n est donnée par :

$$\boxed{S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \text{ nombre de termes } \times \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}}$$

- Si (v_n) est une suite géométrique alors le terme général est donné par :

$$\boxed{v_n = q^n \times v_0}$$

- Si (v_n) est une suite géométrique alors la somme Σ_n est donnée par :

$$\boxed{\Sigma_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \left(\frac{1 - \text{raison}^{\text{ nombre de termes de la somme}}}{1 - \text{raison}}\right) \times \text{premier terme } = \frac{(1-q^{n+1})}{1-q} v_0}$$

Exercice 2 — 5 points

Soit (v_n) la suite arithmétique de preier terme $v_1 = 51$ de raison -4.

1 pt **1** Démontrer que pour tout entier n, on a $v_n = 55 - 4n$.
Comme (v_n) est une suite arithmétique, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= v_1 + (n-1)r \\ &= 51 - 4(n-1) \\ &= 51 - 4n + 4 \\ &= 55 - 4n \end{aligned}$$

1 pt **2** En déduire la valeur de v_{15}.
On a donc $v_{15} = 55 - 4 \times 15 = -5$

$$\boxed{v_{15} = -5}$$

3 pts **3** Justifier que $S = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_{15} = 15 \times \left(\frac{51-5}{2}\right)$.
En déduire la valeur de S.

Comme (v_n) est arithmétique, on a :

$$\begin{aligned} S &= v_1+v_2+v_3+\cdots+v_{15} \\ &= \text{nombre de termes} \times \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2} \\ &= \frac{(15)(v_1+v_{15})}{2} \\ &= \frac{15(51-5)}{2} \\ &= \frac{15(46)}{2} = 345 \end{aligned}$$

$$\boxed{S = v_1+v_2+v_3+\cdots+v_{15} = 345}$$

Exercice 3 — **9 points**

On injecte dans le sang d'un malade une dose de médicament. On suppose que ce médicament se répartit instantanément dans le sang et qu'il est ensuite éliminé progressivement, la concentration diminuant de 30 % chaque heure. On note c_n la concentration en mg/L, n heures après l'injection ($n \in \mathbb{N}$). On donne $c_0 = 4$.

3 pts **1** Calculer c_1, c_2, c_3.

- $c_1 = c_0 - 20\%c_0 = 80\%c_0 = 0,8 \times 8 = 6,4$
- $c_2 = c_1 - 20\%c_1 = 80\%c_1 = 0,8 \times 6,4 = 5,12$
- $c_3 = c_2 - 20\%c_2 = 80\%c_2 = 0,8 \times 5,12 = 4,096$

$$\boxed{c_1 = 6,4, c_2 = 5,12 \text{ et } c_3 = 4,096}$$

3 pts **2** Quelle est la nature de la suite (c_n) ? Préciser ses caractéristiques.
Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n - 20\%c_n \\ &= c_n - \frac{20}{100}c_n \\ &= c_n - 0,2c_n \\ &= 0,8c_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ayant pour tout entier } n,\ c_{n+1} = 0,8c_n, \text{ la suite } (c_n) \text{ est géométrique de raison 0,8 de premier terme } c_0 = 8.}$$

2 pts **3** En déduire l'expression de c en fonction de n.
Comme la suite (c_n) est géométrique, on a $c_n = q^n \times c_0$;

$$\boxed{c_n = 0,8^n \times 8}$$

1 pt **4** Quelle est la concentration 16 h après l'injection ?
La concentration après 16 h après l'injection est :

$$c_{16} = 0,8^{16} \times 8 \approx 0,2252$$

$$\boxed{\text{La concentration 16 h après l'injection sera environ de 0,2252 mg/L.}}$$

Exercice 4 — **4 points**

4 pts On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $q = 3$.
Calculer la somme des 10 premiers termes de cette suite.

On veut calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9$.
Comme la suite (u_n) est géométrique, on a :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1 - \text{Raison}^{\text{Nombres de termes}}}{1 - \text{Raison}} \times \text{Premier terme} \\ &= \frac{1 - 3^{10}}{1 - 3} \times 10 \\ &== \frac{1 - 3^{10}}{-2} \times 10 \\ &= -5 \times \left(1 - 3^{10}\right) \\ &= 5\left(3^{10} - 1\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9 = 5\left(3^{10} - 1\right) = 295\,240}$$

Exercice 5 **6 points**

Selma souhaite acheter son prochain téléphone grâce à son argent de poche. Dans sa tirelire, elle a déjà 75 euros . Chaque mois ses parents lui donne 25 euros d'argent de poche.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme disponible dans sa tirelire après n mois. On a donc $u_0 = 75$
.

1 pt **1** Déterminer u_1 et u_2

$$\begin{array}{ll|ll} u_1 & = u_0 + 25 & u_2 & = u_1 + 25 \\ & = 75 + 25 & & = 100 + 25 \\ & = 100 & & = 125 \end{array}$$

.

$$\boxed{u_1 = 100, u_2 = 125}$$

2 pts **2** Expliquer pour la suite (u_n) est une suite arithmétique. Exprimer alors u_{n+1} en fonction de u_n

la suite (u_n) est arithmétique car on passe d'un mois au suivant en ajoutant les 25 euros donnés par les parents. Ainsi, pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + 25$

1 pt **3** Exprimer u_n en fonction de n.
Comme (u_n) est arithmétique, on a $u_n = u_0 + nr = 75 + 25n$.

$$\boxed{u_n = 75 + 25n}$$

1 pt **4** Déterminer le nombre de mois nécessaire pour que Selma dispose de 250 euros.
On cherche le plus petit entier n vérifiant $u_n \geq 250$:

$$\begin{aligned} u_n \geq 250 &\iff 75 + 25n \geq 250 \\ &\iff 25n \geq 250 - 75 \\ &\iff 25n \geq 175 \\ &\iff n \geq \frac{175}{25} \\ &\iff n \geq 7 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Selma pourra disposer de 250 euros au bout de 7 mois.}}$$

1 pt **5** Le téléphone que souhaite se procurer Selma coûte un peu plus de 385 euros. Combien de mois devra-t-elle patienter ? On cherche le plus petit entier n vérifiant $u_n \geq 250$:

$$\begin{aligned} u_n \geq 385 &\iff 75 + 25n \geq 385 \\ &\iff 25n \geq 385 - 75 \\ &\iff 25n \geq 310 \\ &\iff n \geq \frac{310}{25} \\ &\iff n \geq 12,4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Selma devra patienter 13 mois pour pouvoir se procurer ce téléphone portable.}}$$