Nom : .... *Prénom :*	**DS 06** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Fév. 2023* *Devoir n° 12* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *13,5 points*

13.5 pts

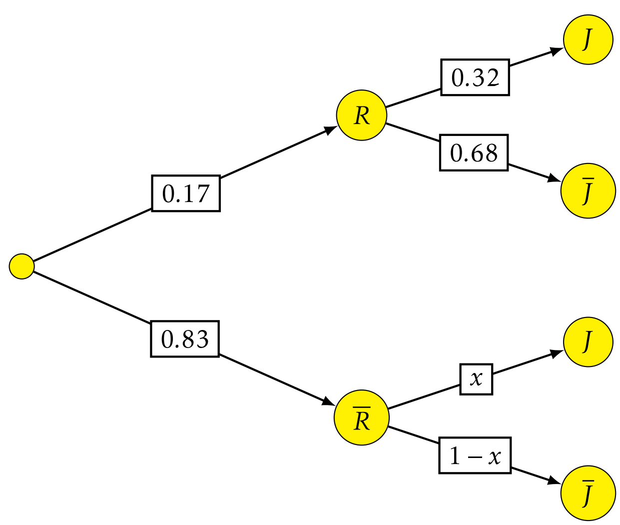
Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1 Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2 Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
$P(R \cap J) = P(R) \times P_R(J) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544$

$$\boxed{P(R \cap J) = 0,0544}$$

3 D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.

✍ Première rédaction :
La probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $P\left(\overline{R}\cap J\right)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(J) = P(R\cap J) + P\left(\overline{R}\cap J\right)$ donc $P\left(\overline{R}\cap J\right) = P(J) - P(R\cap J) = 0,11 - 0,0544 = 0,0556$
soit $0,056$ à 10^{-3} près.

$$\boxed{P(\overline{R}\cap J) \approx 0,056 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

✍ Deuxième rédaction :
On note $P_{\overline{R}}(J) = x$
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(J) &= P(R\cap J) + P\left(\overline{R}\cap J\right)\\
&= 0,0544 + 0,83x\\
\text{D'après l'énoncé} P(J) = 0,11 &\iff 0,0544 + 0,83x = 0,11\\
&\iff 0,83x = 0,11 - 0,0544\\
&\iff x = \frac{0,0556}{0,83}\\
&\iff x = \frac{139}{2075}\\
\text{Alors} P\left(\overline{R}\cap J\right) &= 0,83x\\
&= \frac{139}{2075}\times 0,83 = 0,556
\end{aligned}$$

4 En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

$P_{\overline{R}}(J) = \dfrac{P\left(\overline{R}\cap J\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \dfrac{0,056}{0,83} \approx 0,0675$

> La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc d'environ $6,75\,\%$.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.
La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1 Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.

- On interroge une personne au hasard et il n'y a que deux possibilités : elle utilise régulièrement les transports en commun, avec une probabilité $p = 0,17$, ou pas, avec une probabilité de $1 - p = 0,83$.
- On réalise $n = 50$ fois ce questionnement de façon identique.

Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,17$.

2 Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.

$P(X = 5) = \binom{50}{5} \times 0,17^5 \times (1 - 0,17)^{50-5} \approx 0,069$

$P(X=5) \approx 0,069$
Il y a donc une probabilité de $0,069$ que, sur 50 personnes interrogées, exactement 5 prennent régulièrement les transports en commun.

3 Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.
Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Autrement dit, le recenseur affirme que $P(X < 13) \geqslant 0,95$.
Or $P(X < 13) = P(X \leqslant 12) \approx 0,929 < 0,95$ donc cette affirmation est fausse.

4 Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?
Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est $E(X) = np = 50 \times 0,17 = 8,5$.

Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est 8,5.

Exercice 2 — 13,5 points

13.5 pts Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 4]$ par :

$$f(x) = -30x + 50 + 35 \ln x.$$

1 On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 4]$, montrer que :

$$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

Sur l'intervalle $[1 ; 4]$, $f'(x) = -30 + \dfrac{35}{x} = \dfrac{-30x + 35}{x} = \dfrac{35 - 30x}{x}$.

b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 4]$.
Puisque $1 \leqslant x \leqslant 4$, $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $35 - 30x = 5(7 - 6x)$ donc du facteur $7 - 6x$.

$7 - 6x > 0 \iff 7 > 6x \iff \dfrac{7}{6}x \iff x < \dfrac{7}{6}$;

$7 - 6x < 0 \iff 7 < 6x \iff \dfrac{7}{6}x \iff x > \dfrac{7}{6}$;

$7 - 6x = 0 \iff 7 = 6x \iff \dfrac{7}{6} = x \iff x = \dfrac{7}{6}$.

x	1		$\frac{7}{6}$		4
signe de x		$+$		$+$	
signe de $(7-6x)$		$+$	0	-	
signe de $f'(x)$		$+$	0	-	

c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.

x	1		$\frac{7}{6}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	20	$\nearrow$	$15+35\ln\left(\frac{7}{6}\right)$	$\searrow$	$-70+35\ln 4$

2 Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
D'après le théorème de la bijection :

- ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $\left[\frac{7}{6};4\right]$.
- ✍ f est strictement décroissante sur l' intervalle $\left[\frac{7}{6};4\right]$.
- ✍ $f\left(\frac{7}{6}\right)=15+35\ln\left(\frac{7}{6}\right)\approx 20.4$ et $f(4)=-21.4$
- ✍ f réalise donc une bijection de $\left[\frac{7}{6};4\right]$ sur $\left[=15+35\ln\left(\frac{7}{6}\right);f(4)\right]$
  0 est compris entre $f\left(\frac{7}{6}\right)$ et $f(4)$, en effet $f\left(\frac{7}{6}\right)>0$ et $f(4)<0$
  donc l'équation $f(x)=0$ a une racine unique α dans $\left[\frac{7}{6};4\right]$.

- On a $f(2)\approx 14,26$ et $f(3)\approx -1,54$, donc $2<\alpha<3$;
- On a $f(2,9)\approx 0,26$ et $f(3,0)\approx -1,54$, donc $2,9<\alpha<3,0$;
- On a $f(2,91)\approx 0,09$ et $f(2,92)\approx -0,09$, donc $2,91<\alpha<2,92$;
- On a $f(2,914)\approx 0,0013$ et $f(2,915)\approx -0,005$, donc $2,914<\alpha<2,915$.

2,914 est donc une valeur approchée de α à 10^{-3} près par défaut.

3 Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x\in[1\ ;\ 4]$.

x	$\frac{7}{6}$		α		4
$f'(x)$		$-$		$-$	
Variations de f		$\searrow$	0	$\searrow$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	-	

Par ailleurs f est strictement croissante sur $\left[1;\frac{7}{6};4\right]$; donc si $1<x<\frac{7}{6}$ alors $f(1)<f(x)$, ce qui fournit $f(x)>20>0$, d'où le signe de $f(x)$ sur $[1;4]$.

x	1		α		4
signe de $f(x)$		$+$	0	-	

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1\,;\,4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1 D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits. On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.
2 500 litres correspondent à $x = 2,5$ et $B(2,5) = -15 \times 2,5^2 + 15 \times 2,5 + 35 \times 2,5 \times \ln 2,5 \approx 23{,}925\,4$ soit environ 23 925 €.

Selon ce modèle, le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits est environ 23 925 €.

2 Pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.
La fonction B est dérivable sur $[1\,;\,4]$ et sur cet intervalle :$B = u + vw$ $f B$ est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. , d'où $B' = u' = v'w + w'v$ avec pour tout réel x, dans $[1\,;\,4\,]$:

$$\left\{\begin{array}{ll} u(x) & == -15x^2 + 15x \\ v(x) & = 35x \\ w = \ln x & \end{array}\right. \quad \text{ainsi :} \left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = -30x + 15 \\ v'(x) & = 35 \\ w'(x) = \dfrac{1}{x} & \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} B'(x) \quad & = -30x + 15 + 35\ln x + 35x \times \frac{1}{x} \\ & = 30x + 35\ln x \\ & = f(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{B'(x) = f(x).}$$

3 **a.** À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.
D'après la partie 1, $f(x) = B'(x) \geqslant 0$ sur $[1\ ;\ \alpha]$: la fonction B est donc croissante sur $[1\ ;\ \alpha]$.
De même $f(x) = B'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\ ;\ 4]$: la fonction B est donc décroissante sur $[1\ ;\ \alpha]$.
Conclusion : $B(\alpha)$ est le maximum de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

x	1		α		4
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de B	0	$\nearrow$	$B(\alpha)$	$\searrow$	$B(4)$

b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.
$B(\alpha) = -15\alpha^2 + 15\alpha + 35\alpha\ln\alpha$.
En utilisant la valeur approchée de α trouvée dans la partie 1, on a :
$B(\alpha) \approx -15 \times 2,914^2 + 15 \times 2,914 + 35 \times 2,914 \times \ln 2,914 \approx 25,4201$, soit environ 25 420 € à l'euro près.

Il faut donc que l'entreprise vende 2 914 litres de jus de fruits pour faire un bénéficie maximal.