Nom :	DS 03	TMATHS OISELET — Nov. 2022
Prénom :	CASE DES MATHS	Devoir n° 06 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *4,5 points*

4.5 pts Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 3u_n - 20$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = -4 \times 3^n + 10$.

Exercice 2 — *10,5 points*

10.5 pts Déterminer la limite des suites suivantes :

1. Pour tout entier naturel $n, A_n = (e^{-n} + 2)\left(e^{2n} + 5\right)$
2. Pour tout entier naturel $n, B_n = n^3 - 2n^2 + 7$
3. Pour tout entier naturel $n, C_n = \dfrac{n-5}{n^2+4}$
4. Pour tout entier naturel $n, D_n = \dfrac{3e^n - 1}{e^{2n} + 3}$
5. Pour tout entier naturel $n, E_n = \dfrac{5^n + 1}{3 + 0,75^n}$

Exercice 3 — *9,5 points*

9.5 pts On considère la suite (u_n) définie pour tout n par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

Objectif de l'exercice :On veut démontrer par récurrence que $u_n > 1$pour tout n.
On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$

1. Déterminer la dérivée f'de f et déterminer son signe sur $[1;+\infty[$.
2. En déduire les variations de f sur $[1;+\infty[$.
3. En déduire que si $x > 1$ alors $f(x) > 1$.
4. En utilisant les résultats précédents, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 1$.

Exercice 4 — *9 points*

9 pts Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par : $u_n = \dfrac{5n+1}{n+2}$

1. Calculer le neuvième terme.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{9}{(n+2)(n+3)}$

3. En déduire la monotonie de la suite (u_n)
4. Montrer que la suite est majorée par 5.

Exercice 5 *10 points*

10 pts Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

1. Calculer $C'(t)$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
Variations de g	0 $\searrow$	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f.
On ne demande pas les limites de la fonction f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.