Nom :	DS 03	TMATHS OISELET	Nov. 2022
Prénom :	CASE DES MATHS	Devoir n° 06	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *4,5 points*

4.5 pts Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 3u_n - 20$.

Démontrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $n, u_n = -4 \times 3^n + 10.$ »

- ***Initialisation :***
  $-4 \times 3^0 + 10 = -4 \times 1 + 10 = 6$ et $u_0 = 6$.
  Donc la propriété est vraie au rang 0.
- ***Hérédité :*** soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $u_k = -4 \times 3^k + 10$.(HR)

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3u_k + 20 \\ &= 3\left(-4 \times 3^k + 10\right) - 20 \quad \text{daprès (HR)} \\ &= -4 \times 3 \times 3^k + 30 - 20 \\ &= -4 \times 3^{k+1} + 10 \end{aligned}$$

- ***Conclusion :*** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n, on a « $u_n = -4 \times 3^n + 10$ ».

Exercice 2 — *10,5 points*

10.5 pts Déterminer la limite des suites suivantes :

1 Pour tout entier naturel $n, A_n = (e^{-n} + 2)\left(e^{2n} + 5\right)$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} (e^{-n} + 2) = 2 \\ &\lim_{n\to+\infty} \left(e^{2n} + 5\right) = +\infty \end{aligned}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = +\infty}$$

2 Pour tout entier naturel $n, B_n = n^3 - 2n^2 + 7$

$$\begin{aligned} B_n &= n^3 - 2n^2 + 7 \\ &= n^3\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{n^2} = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \\ &\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{7}{n^2}\right) = 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{n\to+\infty} B_n = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} B_n = +\infty}$$

3 Pour tout entier naturel $n, C_n = \dfrac{n-5}{n^2+4}$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{n-5}{n^2+4} \\ &= \frac{n\left(1-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1-\frac{5}{n}}{1+\frac{4}{n^2}} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} C_n = 0}$$

4 Pour tout entier naturel $n, D_n = \dfrac{3e^n-1}{e^{2n}+3}$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{3e^n-1}{e^{2n}+3} \\ &= \frac{e^n\left(3-\frac{1}{e^n}\right)}{e^{2n}\left(1+\frac{3}{e^{2n}}\right)} \\ &= e^{-n} \times \frac{3-e^{-n}}{1+3e^{-2n}} \end{aligned}$$

On remarque alors : $e^{-n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ avec $\dfrac{1}{e} \approx 0,37$.

De même $e^{-2n} = \left(\dfrac{1}{e^2}\right)^n$ car $\dfrac{1}{e^2} \approx 0,135$.

On utilise alors le résultat suivant :

Propriété 1

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Comme $-1 < \dfrac{1}{e^2} < \dfrac{1}{e} < 1$, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0$;

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} D_n = 0}$$

5 Pour tout entier naturel $n, E_n = \dfrac{5^n+1}{3+0,75^n}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} (5^n+1) = +\infty \text{ car } 5>1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3+0,75^n = 3 \text{ car } -1<0,75<1 \end{array}\right\} \quad \text{Par quotient } \lim_{n\to+\infty} E_n = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} E_n = +\infty}$$

Exercice 3 — 9,5 points

9.5 pts On considère la suite (u_n) définie pour tout n par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

Objectif de l'exercice :On veut démontrer par récurrence que $u_n > 1$pour tout n.

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$

1 Déterminer la dérivée f'de f et déterminer son signe sur $[1;+\infty[$.

f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1;+\infty[$.

$f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $[1;+\infty[$: $\begin{cases} u(x) & = 4x-1 \\ v(x) & = x+2 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) & = 4 \\ v'(x) & = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4((x+2)-1\times(4x-1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{4x+8-4x+1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{9}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Signe de la dérivée : Comme 9>0 et $(x+2)^2 > 0$ sur $[1;+\infty[$, on déduit par quotient que $\dfrac{9}{(x+2)^2} > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [1;+\infty[\text{, on a } f'(x) > 0}$$

2 En déduire les variations de f sur $[1;+\infty[$.

La dérivée étant strictement positive sur $[1;+\infty[$, la fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

3 En déduire que si $x > 1$ alors $f(x) > 1$.

On déduit le tableau de variations de f sur $[1;+\infty[$:

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
Variations de f	1 $\nearrow$

Comme la fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$, si $x > 1$ alors $f(x) > f(1)$. On calcule $f(1) = \dfrac{4-1}{1+2} = 1$

$$\boxed{\text{Ainsi si } x > 1 \text{ alors } f(x) > 1.}$$

4 En utilisant les résultats précédents, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n > 1$.

✍ ***Initialisation :***
$u_0 = 4$ ainsi $u_0 > 1$.
Donc la propriété est vraie au rang 0.

✍ ***Hérédité :*** soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $u_k > 1$.(HR)

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= f(u_k) & \\ & u_k > 1 & \text{daprès (HR)} \\ & f(u_k) > f(1) & \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } [1;+\infty[\\ & u_{k+1} > 1 & \end{aligned}$$

✍ ***Conclusion :*** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n, on a « $u_n > 1$ ».

Exercice 4 — 9 points

9 pts Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par : $u_n = \dfrac{5n+1}{n+2}$

1 Calculer le neuvième terme.

Comme le premier terme de (u_n) est u_0, le neuvième terme est u_8

$u_8 = \dfrac{5\times 8+1}{8+2} = \dfrac{41}{10} = 4,1$

2 Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{9}{(n+2)(n+3)}$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{5(n+1)+1}{(n+2)+1} - \frac{5n+1}{n+2}\\
&= \frac{5n+6}{n+3} - \frac{5n+1}{n+2}\\
&= \frac{(5n+6)(n+2)-(n+3)(5n+1)}{(n+2)(n+3)}\\
&= \frac{5n^2+10n+6n+12-(5n^2+n+15n+3)}{(n+2)(n+3)}\\
&= \frac{5n^2+16n+12-5n^2-16n-3}{(n+2)(n+3)}\\
&= \frac{9}{(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

On a donc bien pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{9}{(n+2)(n+3)}$

3 En déduire la monotonie de la suite (u_n)

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, ici n est un entier naturel $n \geq 0$, donc $n \geq 0$, on a donc :

$9 > 0$

$n+2 > 0$ le quotient de nombres positif est positif, donc $\dfrac{9}{(n+2)(n+3)} > 0$

$n+3 > 0$

Ayant pour tout entier $n \geq 1$; $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite est donc strictement croissante.

4 Montrer que la suite est majorée par 5.

On doit prouver que pour tout entier $n \geq 0$ on a : $u_n \geq 5$. On forme $u_n - 5$ et on montre que cette quantité est négative.

$$\begin{aligned}
u_n - 5 &= \frac{5n+1}{n+2} - 5\\
&= \frac{5n+1}{n+2} - \frac{5(n+2)}{n+2}\\
&= \frac{5n+1-5n-10}{n+2}\\
&= \frac{-9}{n+2}
\end{aligned}$$

-9< 0 et $n+2 > 0$ donc $\dfrac{-9}{n+2} < 0$, ce qui prouve $u_n - 5 < 0$ et donc :

la suite (u_n) est majorée par 5.

Exercice 5 — 10 points

10 pts Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

1 Calculer $C'(t)$.

La fonction C est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $C'(t) = 12\left(0 - \left(-\dfrac{7}{80}\right)\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right)$

$$\boxed{C'(t) = \frac{21}{20}\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} > 0}$$

2 Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0\ ;\ +\infty[$.

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $\mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} > 0$ et $\dfrac{21}{20} > 0$, par produit $C'(t) > 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$$\boxed{\text{donc la fonction } C \text{ est strictement croissante sur } [0\ ;\ +\infty[.}$$

Partie B : étude de fonctions

1 Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 105\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right) + \frac{105}{x}\times\left(0 - \left(-\frac{3}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)\right) \\ &= \frac{105}{x^2}\left(-1 + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{\frac{3}{40}}\right) \\ &= \frac{105\,g(x)}{x^2} \text{ où } g \text{ est la fonction définie sur } [0\ ;\ +\infty[\text{ par } g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1. \end{aligned}$$

2 On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
Variations de g	$0 \searrow -1$

En déduire le sens de variation de la fonction f.

✍ On étudie le signe de la dérivée de f, pour cela il nous faut étudier le signe de g qui se déduit de son tableau de variation :

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	0 $\quad$ $-$
Variations de g	$0 \searrow -1$
Signe de $g(x)$	0 $\quad$ -

✍ On en déduit le signe de $f'(x)$:

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
signe de 105	$+$
signe de $g(x)$	0 $\quad$ -
signe de x^2	0 $\quad$ $+$
signe de $f'(x)$	$\|$ $\quad$ -

✍ Ayant $f'(x) < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$, on déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur }]0\,;\,+\infty[.}$$

On ne demande pas les limites de la fonction f.

3 Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,80]$.
On déduit le tableau de variations de f sur $[1\,;\,80]$:

x	1 $\quad\quad\quad\quad$ 80
$f'(x)$	$-$
Variations de f	$f(1) \searrow f(80)$

$$f(1)=105\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}}\right)\approx 7,59 \text{ et } f(80)=\frac{105}{80}\left(1-\mathrm{e}^{-6}\right)\approx 1,31.$$

D'après le théorème de la bijection :

- ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $[1\,;80]$.
- ✍ f est strictement décroissante sur l' intervalle $[1\,;80]$.
- ✍ $f(1)=105\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}}\right)\approx 7,59$ et $f(80)=\dfrac{105}{80}\left(1-\mathrm{e}^{-6}\right)\approx 1,31$.
- ✍ f réalise donc une bijection de $[1\,;80]$ sur $[f(80);f(1)]$
  $5,9$ est compris entre $f(1)$ et $f(80)$, en effet $f(1)>5,9$ et $f(80)<5,9$
  donc l'équation $f(x)=5,9$ a une racine unique α dans $[1\ ;\ 80]$.

En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

- ✲ f étant strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, si $x>80$ alors $f(x)<f(80)<5,9$.
  Donc l'équation $f(x)=5,9$ n'a pas de solution sur $]80;+\infty[$.
- ✲ f étant strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, si $x<1$ alors $f(x)>f(1)>5,9$.
  Donc l'équation $f(x)=5,9$ n'a pas de solution sur $]0;1[$.

Ainsi l'équation $f(x)=5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.
La calculatrice donne $f(8)\approx 5,92>5,9$ et $f(9)\approx 5,73<5,9$, donc $8<\alpha<9$;
$f(8,1)\approx 5,902>5,9$ et $f(8,2)\approx 5,882<5,9$, donc $8,1<\alpha<8,2$.

On a donc au dixième près $\alpha\approx 8,1$.