Nom :	**DS 05**	TMATHS Janv. 2022
Prénom :		Devoir n° 05 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 6 points

6 pts *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1 $\forall x > 0$, l'équation $\ln(x) + \ln(x+3) = 3\ln(2)$ est équivalente à l'équation

Réponse A : $3x - 2 = x + 5$ **Réponse B :** $2x^2 - 6x - 8 = 0$
Réponse C : $2x^2 - 5x - 3 = x + 5$ **Réponse D :** $x = 4$.

- $x \in D \iff \begin{cases} 2x+1>0 \\ x-3>0 \\ x+5>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > 3 \\ x > -5 \end{cases} \iff x > 3$

$$\boxed{D =]3;+\infty[}$$

- $$\begin{aligned} \ln(2x+1) + \ln(x-3) = \ln(x+5) &\iff \ln((2x+1)(x+5)) = \ln(x+5) \\ &\iff (2x+1)(x-3) = x+5 \\ &\iff 2x^2 - 5x - 3 = x + 5 \\ &\iff 2x^2 - 6x - 8 = 0 \\ &\iff x^2 - 3x - 4 = 0 \end{aligned}$$

  En calculant Δ, on trouvez que -1 et 4 sont solutions
- $-1 \notin D$ donc -1 n'est pas solution.
  $4 \in D$ donc 4 n'est pas solution.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4\}.}$$

$\boxed{\text{La bonne réponse est D.}}$

2 X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3;p)$. On donne $P(X=0) = \dfrac{1}{64}$. Alors :

Réponse A : $p = \dfrac{1}{64}$ **Réponse B :** $p = \dfrac{1}{4}$

Réponse C : $p^3 = \dfrac{1}{64}$ **Réponse D :** $(1-p)^3 = \dfrac{1}{64}$.

$P(X=0) = (1-p)^3$, donc $(1-p)^3 = \dfrac{1}{64} \iff 1 - p = \dfrac{1}{4} \iff p = \dfrac{3}{4}$

La bonne réponse est D.

3 La suite (u_n) est définie par $u_0 = -0,5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 0,3$
Soit P_n la proposition : « $0 \leq u_n \leq 0,6$ »

Réponse A :
P_0 est fausse,
donc pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est fausse.

Réponse B : P_n est héréditaire.

Réponse C : pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie.

Réponse D : il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que P_n est fausse.

La propriété est héréditaire :en effet, supposons que la propriété soit pour un certain entier n :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 0,6 &\iff 0 \leq 0,5u_n \leq 0,3 && \text{en multipliant par 0,5>0} \\ &\iff 0,3 \leq 0,5u_n + 0,3 \leq 0,6 && \text{en ajoutant 0,3} \\ &\text{Ainsi } 0 \leq u_{n+1} \leq 0,6 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que la propriété est héréditaire.

La bonne réponse est B.

4 X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(6;0,2)$.
Alors $P(2 \leq X < 4) = \cdots$

Réponse A : $P(X = 2) + P(X = 3)$

Réponse B : $P(X < 4) - P(X < 1)$

Réponse C : $0,672$

Réponse D : $0,328$

$$\begin{aligned} P(2 \leq X < 4) &= P(2 \leq X \leq 3) \\ &= P(X = 2) + P(X = 3) \end{aligned}$$

La bonne réponse est A.

Exercice 2 — 9 points

9 pts

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note :

- S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

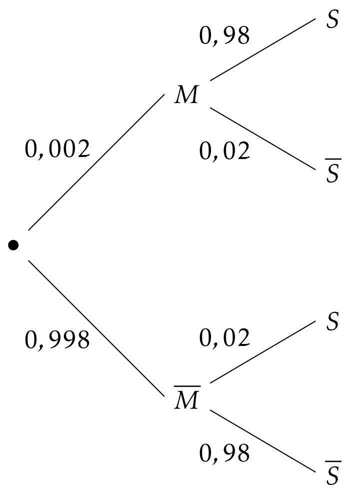
1 On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à $0,98$;

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à $0,98$.

a. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S})$.
D'après l'énoncé $P(M) = \dfrac{1}{500} = 0,002$, donc $P\left(\overline{M}\right) = 1 - 0,002 = 0,998$. D'autre part $P_M(F) = 0,98$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right) = 0,98$.

b. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.
On peut commencer l'arbre pondéré :



c. Montrer que : $P(S) = 0,021\,92$.
On utilise la formule des probabilités totales :
On décompose S suivant la partition : $M, \overline{M}$.

$$p(S) = p(M \cap S) + p(\overline{M} \cap S)$$

$$\begin{aligned} p(S) &= p(M \cap S) + p(\overline{M} \cap S) \\ &= 0,002 \times 0,98 + 0,998 \times 0,02 \\ &= 0,021\,92 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } p(S) = 0,02192}$$

d. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3}.)

$$\begin{aligned} p_S(M) &= \frac{p(S \cap M)}{p(S)} \\ &= \frac{0,002 \times 0,98}{0,02192} \\ &\approx 0,089 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique vaut environ } 0,089.}$

2 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $0,021\,92$.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
On répète 80 fois, de façon indépendante,l'expérience « on choisit au hasard une personne parmi celles qui vont se présenter au portique. »qui comporte 2 issues :

- « La personne fait sonner le portique »considéré comme succès, de probabilité $p = 0,02192$
- « La personne ne fait pas sonner le portique. »considéré comme échec, de probabilité $q = 1-p = 0,97808$

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres 80 et 0,02192 notée $\mathscr{B}(80;0.02192)$.

Pour tout entier k où $0 \leq k \leq 80$, on a :

$$P(X=k) = \binom{80}{k} \times (0,02192)^k \times (0,97808)^{80-k}$$

b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
L'espérance mathématique est le produit np des paramètres.

$E(X) = 1,7536$, si on répète un très grand nombre de fois l'expérience consistant à faire passer un lot de 80 personnes, alors en moyenne il y aura 1,75 personnes qui feront sonner le portique sur un lot de 80 personnes.

c. Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :

- la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
  On veut ici calculer $P(X \geq 1)$.
  On passe par l'événement contraire :

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(\overline{X \geq 1}) \\ & 1 - P(X < 1) \\ & 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - 0,097808^{80} \\ &\approx 0,830 \end{aligned}$$

la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique vaut environ 0,83.

2nd DISTR A binomFdp(80 , 0.02192 , 0)
$binomFdp(80, 0.02192, 0) \approx 0.1698$ Ceci calcule $P(X=0)$ dans le cas où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(80, 0.02192)$

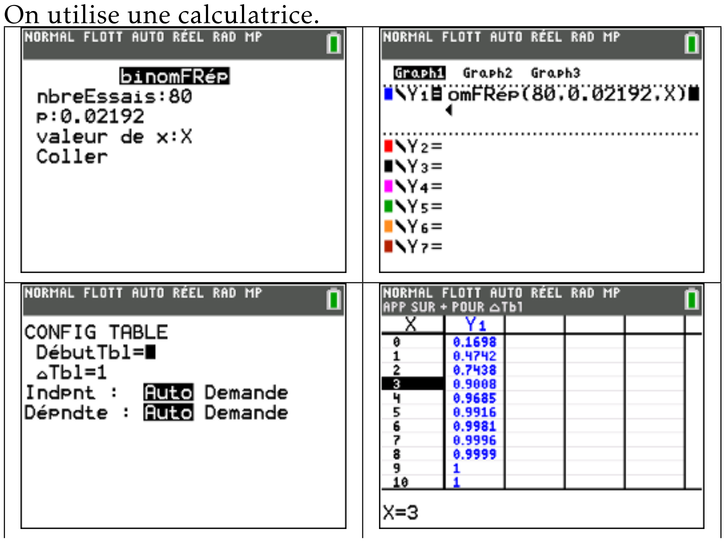
- la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.
  On veut ici calculer $P(X \leq 5)$.

2nd DISTR B binomFRép(80 , 0.02192 , 5)
binomFRép$(80, 0.02192, 5) \approx 0,9916$

la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique vaut environ 0,9916.

Ceci calcule $P(X \leq 5)$ dans le cas où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(80, 0.02192)$

d. Sans le justifier, donner la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$.
On utilise une calculatrice.



$\boxed{3 \text{ est donc le plus petit entier } n \text{ tel que } P(X \leqslant n) \geqslant 0,9.}$

Exercice 3 — 20 points

20 pts

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

Partie A

1 Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \ln\left(\dfrac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{3}{1} = 3$ et finalement par composée

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 3$.

Ce résultat montre que géométriquement la droite d'équation $y = \ln 3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

2 **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

f est la composée de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

Ici $f = \ln u$ donc $f' = \dfrac{u'}{u}$.

Avec $u(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$, on a $u'(x) = \dfrac{3(x+1) - 1\times(3x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Donc $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \dfrac{2}{(3x+1)(x+1)}$.

$$\boxed{\text{On a bien : } f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}}$$

b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
$f'(x)$ quotient de nombres supérieurs à zéro est supérieure à zéro, donc f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ de $f(0) = \ln\frac{1}{1} = 0$ à $\ln 3$.

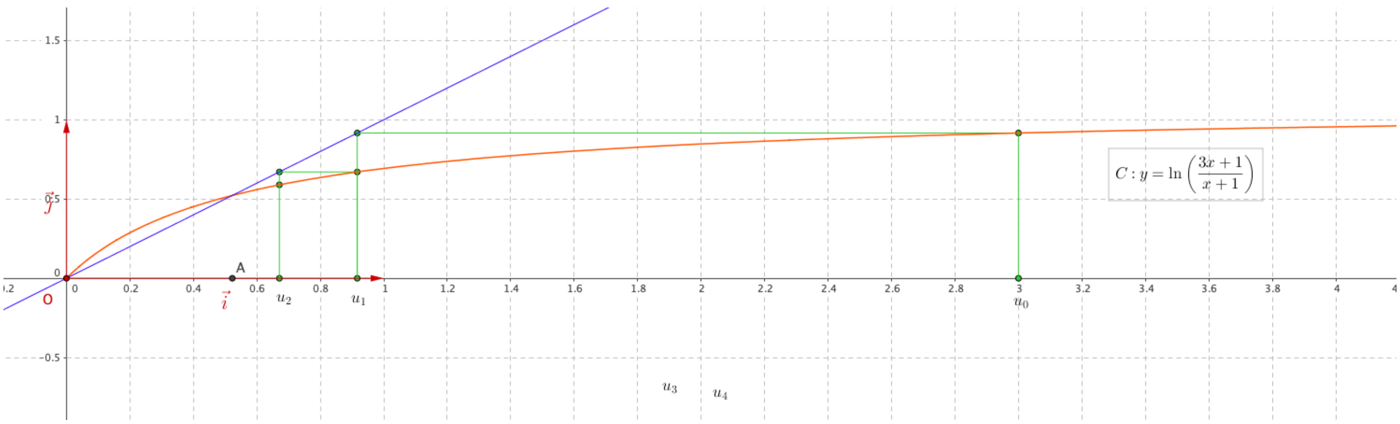
x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
Variations de f	$0 \nearrow \ln 3$

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1 Sur la figure ci-dessous, placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1 et u_2 et conjecturer la monotonie et la convergence de la suite (u_n) dont on donnera une évaluation de la limite ℓ si besoin.



Au vu du graphique, la suite (u_n) semble décroissante et semble converger vers un réel ℓ l'abscisse strictement positive du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$.

2 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Initialisation : $u_0 = 3$ et $u_1 = \ln\left(\frac{9+1}{3+1}\right) = \ln\frac{10}{4} = \ln\frac{5}{2} \approx 0,92$.

On a bien $\frac{1}{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Par croissance (démontrée en **A. 2.**) de la fonction f, on a :
$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.

Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{1}{2}+1}\right) = \left(\frac{5}{3}\right) \approx 0,51 > 0,5$.

On a donc l'encadrement $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, il est vrai au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, on a donc démontré que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

3 Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Le résultat précédent montre que le suite (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$: elle converge donc vers une limite supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, donc positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.
L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ où
$x_0 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0,215$ et $g(x_0) \approx 0,088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	0	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

1 Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.
D'après le théorème de la bijection :

- ✍ g est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I = [x_0; +\infty[$.
- ✍ g est strictement décroissante sur l' intervalle $I = [x_0; +\infty[$.
- ✍ $g(x_0) > 0$ (car g est strictement croissante sur $[0; x_0[$ et $g(0) = 0$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
- ✍ g réalise donc une bijection de $[x_0; +\infty[$ sur $]-\infty; g(x_0)]$
  Comme $0 \in]-\infty; g(x_0)]$, l'équation $g(x) = 0$ a une racine unique α dans $[x_0; +\infty[$.

2

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à $0,01$ près.

b. Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

$x \leftarrow 0,22$
Tant que $g(x) > 0$ faire
    $x \leftarrow x + 0,01$
Fin de Tant que

```python
# DS5 TMATHS8
from math import *
def f(x):
    y= log((3*x+1)/(x+1))
    return y
def g(x):
    y= f(x)-x
    return y


x=0.22
while g(x)>0:
     x=x+0.01

print(x)
```

0,53 est la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

3 En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).
(u_n) est une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$ convergeant vers un réel ℓ solution de l'équation $f(x) = x$, soit $f(x) - x = 0$, c'est-à-dire $g(x) = 0$.
Par ailleurs, $u_n \geq \dfrac{1}{2}$, donc par passage à la limite, on obtient $\ell \geq \dfrac{1}{2}$, ainsi $\ell > 0$ est l'unique solution strictement positive de l'équation $g(x) = 0$.
Ce qui prouve que $\ell = \alpha$.

Nom :	**DS 05**	TMATHS *Janv. 2022*
Prénom :		*Devoir n° 05* .../...

Feuille de réponses de l'exercice 2 :

✄ ✄

A rendre au bout de 20 minutes.

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4
Réponse	D	D	B	A