Nom : .... Prénom :	DS 02 CASE DES MATHS	TMATHS8 Oct. 2021 Devoir n° 03 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 6 points

6 pts

f est une fonction définie par $f(x) = x^2 - 5x + 11$.

g est une fonction définie par $g(x) = \dfrac{4}{x}$

1 Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de $g \circ f$.

- domaine de définition de $g \circ f$:
  En notant D_f et D_g les domaines de définition des fonctions f et g :
  $g \circ f(x) = g(f(x))$ existe ssi $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$
  Ici $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}^\star$
  Donc $x \in D_{g\circ f} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \iff x^2 - 5x + 11 \neq 0$
  On calcule $\Delta = 25 - 4 \times 11 = -19$.
  Ainsi $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$
- domaine de dérivabilité de $g \circ f$:
  $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; en effet f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme, de plus pour tout réel x ; $f(x) \neq 0$, et g est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$.

2 Déterminer l'expression de $g \circ f(x)$ puis calculer sa dérivée.

- $$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 - 5x + 11) \\ &= \frac{4}{x^2 - 5x + 11} \end{aligned}$$
- Calcul de la dérivée :
  - Méthode 1 $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$
    Ici $f'(x) = 2x - 5$ et $g'(x) = -\dfrac{4}{x^2}$
    Donc :
    $$\begin{aligned} (g \circ f)'(x) &= f'(x) \times g'(f(x)) \\ &= (2x - 5) \times \left(-\frac{4}{(x^2 - 5x + 11)^2}\right) \\ &= -\frac{4(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 11)^2} \end{aligned}$$
  - Méthode 2 : $h = g \circ f = \dfrac{4}{u}$ donc $h' = -4\dfrac{u'}{u^2}$
    Ici $u(x) = x^2 - 5x + 11$, donc $u'(x) = 2x - 5$ et donc $h'(x) = -4 \times \dfrac{2x - 5}{x^2 - 5x + 11}$

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = -\frac{4(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 11)^2}}$$

Exercice 2 — 9 points

9 pts Une entreprise qui fabrique des cerfs-volants a modélisé son coût total de production, en milliers d'euros, par la fonction : $C_T(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ où x est la quantité produite, en milliers de cerfs-volants, avec $0 \leq x \leq 6$.

1 Justifier que la fonction C_T est continue sur $[0\,;6]$.
C_T est une fonction polynôme, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;6]$.
Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur ce même intervalle, ainsi C_T est continue sur $[0\,;6]$.

2 Etudier les variations de la fonction C_T sur $[0\,;6]$.

- Dérivée : $C_T'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{1}{4} \times 2x - \frac{1}{2}$

$$\boxed{C_T'(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x^2 - x - 1)}$$

- Signe de la dérivée : $\Delta = b^2 - 4ac = 9$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{4} = 1 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ est un trinôme du second degré qui a pour racines $-\frac{1}{2}$ et 1 ; il a donc le signe de $a = \frac{1}{2}$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
signe de $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Tableau de variation de C_T sur $[0;6]$

x	0		1		6
$C_T'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de C_T	2	$\searrow$	$\frac{19}{12}$	$\nearrow$	62

3 Justifier que l'équation $C_T(x) = 50$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ et déterminer un encadrement de α à 0,001 près.
D'après le théorème de la bijection :

- ✍ C_T est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I = [1;6]$.
- ✍ C_T est strictement croissante sur l' intervalle $I = [1;6]$.
- ✍ $C_T(1) = \frac{19}{12}$ et $C_T(6) = 62$
- ✍ C_T réalise donc une bijection de $[1;6]$ sur $\left[\frac{19}{12};.62\right]$
  50 est compris entre $C_T(1)$ et $C_T(6)$, en effet $C_T(1) < 50$ et $C_T(6) > 50$
  donc l'équation $C_T(x) = 50$ a une racine unique α dans $[1;6]$.

Par ailleurs sur $[0;1]$ C_T est strictement décroissante, ainsi si $0 \leq x \leq 1$ alors $C_T(0) \geq C_T(x) \geq C_T(6)$
en particulier $C_T(x)|eq2$ et donc l'équation $C_T(x) = 50$ n'a pas de solution sur $[0;1]$.

$$\boxed{\text{En conclusion, l'équation } C_T(x) = 50 \text{ a une solution unique dans } [0;6].}$$

Encadrement de α à 0,001 près :
Avec une calcultrice on obtient : $C_T(5,603) \approx 49,983$ et $C_T(5,604) \approx 50,011$, et donc :

$$\boxed{5,603 < \alpha < 5,604}$$

4 L'entreprise ne peut pas dépasser un coût total de production de 50 000 €. Quel nombre maximal de cerfs-volants peut-elle produire ?
Avec le tableau de variation, on obtient $C_T(x) \leq 50$ pour $x \in [0;\alpha]$.

$$\boxed{\text{L'entreprise ne s dépassera pas un coût total de production de 50 000 €si elle fabrique moins de 5 603 cerfs-volants.}}$$

Exercice 3 — 11 points

11 pts

Soit la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$

1 Calculer u_5 et le onzième terme.

- ✍ $u_5 = \dfrac{3\times5+1}{5+1} = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3}$
- ✍ Comme le premier terme de (u_n) est u_1, le onzième terme est u_{11}
  $u_{11} = \dfrac{3\times11+1}{11+1} = \dfrac{34}{12} = \dfrac{17}{6}$

$$\boxed{u_5 = \frac{8}{3} \text{ et } u_{11} = \frac{17}{6}}$$

2 Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)+1}{(n+1)+1} - \frac{3n+1}{n+1}\\
&= \frac{3n+4}{n+2} - \frac{3n+1}{n+1}\\
&= \frac{(3n+4)(n+1)-(n+2)(3n+1)}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{3n^2+3n+4n+4-(3n^2+n+6n+2)}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{3n^2+7n+4-3n^2-7n-2}{(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

On a donc bien pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

3 En déduire la monotonie de la suite (u_n)

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, ici n est un entier naturel $n \geq 1$, donc $n > 0$, on a donc :

$$\begin{array}{rl} 2 > 0 & \\ n+1 > 0 & \text{le quotient de nombres positif est positif, donc} \quad \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} > 0 \\ n+2 > 0 & \end{array}$$

Ayant pour tout entier $n \geq 1$; $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite est donc strictement croissante.

4 Montrer que la suite est majorée par 3.

On doit prouver que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $u_n \geq 3$. On forme $u_n - 3$ et on montre que cette quantité est négative.

$$\begin{aligned} u_n - 3 &= \frac{3n+1}{n+1} - 3 \\ &= \frac{3n+1}{n+1} - \frac{3(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{3n+1-3n-3}{n+1} \\ &= \frac{-2}{n+1} \end{aligned}$$

-2< 0et $n+1 > 0$ donc $\dfrac{-2}{n+1} < 0$, ce qui prouve $u_n - 3 < 0$ et donc :

la suite (u_n) est majorée par 3.

Exercice 4 — 6 points

6 pts

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n,: $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.

1 Calculer u_1, u_2 et u_3.

- ✗ $u_1 = 0,85u_0 + 1,8 = 0,85 \times 8 + 1,8 = 8,6$
- ✗ $u_2 = 0,85u_1 + 1,8 = 0,85 \times 8,6 + 1,8 = 9,11$
- ✗ $u_3 = 0,85u_2 + 1,8 = 0,85 \times 9,11 + 1,8 = 9,5435$

$u_1 = 8,6$; $u_2 = 9,11$; $u_3 = 9,5435$

2 Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 12$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85. Préciser son premier terme v_0.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 12 \\ &= 0,85u_n + 1,8 - 12 \\ &= 085u_n - 10,2 \\ &= 085v_n \text{ car } 0,85 \times 12 = 10,2 \end{aligned}$$

Ayant pour tout entier n, $v_{n+1} = 0,85v_n$, on a prouvé que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,85 de premier terme $v_0 = u_0 - 12 = 8 - 12 = -4$.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

Comme (v_n) est géométrique, $v_n = q^n \times v_0 = -4 \times 0,85^n$

$$\boxed{v_n = -4 \times 0,85^n}$$

c. En déduire que $u_n = 12 - 4 \times 0,85^n$.
Ayant $v_n = u_n - 12$, on déduit $u_n = v_n + 12 = 12 - 4 \times 0,85^n$

d. Donner le sens de variation de (v_n), en déduire le sens de variation de (u_n). Justifier.

- Sens de variation de (v_n) : on forme $v_{n+1} - v_n$ et on étudie son signe

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -4 \times 0,85^{n+1} - (-4 \times 0,85^n) \\ &= -4 \times 0,85^{n+1} + 4 \times 0,85^n \\ &= 4 \times 0,85^n (1 - 0,85) \\ &= 0,6 \times 0,85^n \end{aligned}$$

Pour tout entier n on a : $0,85^n > 0$ et 4>0 , ainsi $4 \times 0,85^n > 0$

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n\text{, on a } v_{n+1} - v_n > 0\text{, et donc } (v_n) \text{ est croissante.}}$$

- Sens de variation de (u_n) :la suite (v_n) est croissante, donc la suite (u_n) de terme général $u_n = v_n + 12$ est également croissante.

Exercice 5 — 5 points

5 pts On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$

Démontrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $n, u_n = 3 \times 2^n + 4$. »

✍ ***Initialisation :***
$3 \times 2^0 + 4 = 3 \times 1 + 4 = 7$ et $u_0 = 7$.
Donc la propriété est vraie au rang 0.

✍ ***Hérédité :*** soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $u_k = 3 \times 2^k + 4$.(HR)

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - 4 \\ &= 2\left(3 \times 2^k + 4\right) - 4 \quad \text{daprès (HR)} \\ &= 6 \times 2^k + 8 - 4 \\ &= 3 \times 2 \times 2^k + 4 \\ &= 3 \times 2^{k+1} + 4 \end{aligned}$$

✍ ***Conclusion :*** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n, on a « $u_n = 3 \times 2^n + 4$ ».

Exercice 6 — 3 points

3 pts
A compléter sur le sujet, on ne demande pas de justification.

Fonction	Dérivées	
$f(x) = 3e^{-x}$	$f'(x) = -3e^{-x}$	$(e^u)' = u'e^u$
$f(x) = e^{x^2-2x+4}$	$f'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x+4}$	
$f(x) = e^x(1-e^{2x}) = e^x - e^{3x}$	$f'(x) = e^x - 3e^{3x}$	
$f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{-x}} = e^{3x}$	$f'(x) = 3e^{3x}$	

Exercice 7 Bonus — 3 points

3 pts

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{ax+b}$
Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de la fonction f admette une tangente horizontale en $x = 1$ et passe par le point de coordonnées $(2\,;6)$.

$$\begin{aligned} A(2;6) &\iff f(2) = 6 \\ &\iff 2e^{a\times 2+b} = 2 \\ &\iff e^{2a+b} = 1 \\ &\iff e^{2a+b} = e^0 \\ &\iff 2a+b = 0 \end{aligned}$$

La courbe représentative de la fonction f admette une tangente horizontale en $x = 1$ se traduit par $f'(1) = 0$. Calculons $f'(x)$.
f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.
$f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= x \\ v(x) &= e^{ax+b} \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= ae^{ax+b} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\times e^{ax+b} + ae^{ax+b}\times x \\ &= e^{ax+b}(1+ax) \\ f'(1) = 0 &\iff e^{a\times 1+b}(1+a) = 0 \\ &\iff (1+a) = 0 \text{ car } e^{a\times 1+b} > 0 \\ &\iff a = -1 \end{aligned}$$

$a = -1$ et donc $2a + b = 0 \iff -2 + b = 0 \iff b = 2$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } f(x) = xe^{-x+2}}$