Un algorithme ? ...

Exercice 1 Étude de sommes

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit $s_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dots \dfrac{1}{n(n-1)} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)}$.

On définit aussi pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

1. Étude de (s_n).

   a) Calculer s_5.
   On a successivement
   - $s_2 = \dfrac{1}{2\times 1} = \dfrac{1}{2}$
   - $s_3 = \dfrac{1}{2\times 1} + \dfrac{1}{3\times 2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$
   - $s_4 = \dfrac{1}{2\times 1} + \dfrac{1}{3\times 2} + \dfrac{1}{4\times 3} = s_3 + \dfrac{1}{12} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{3}{4}$
   - $s_5 = \dfrac{1}{2\times 1} + \dfrac{1}{3\times 2} + \dfrac{1}{4\times 3} + \dfrac{1}{5\times 4} = s_4 + \dfrac{1}{20} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{4}{5}$

   b) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.
   On a $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} = \dfrac{a(x-1)}{x(x-1)} + \dfrac{bx}{x(x-1)} = \dfrac{a(x-1)+bx}{x(x-1)}$
   Ainsi : $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} = \dfrac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$
   On cherche donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$
   En identifiant les numérateurs, il vient :

$$\begin{cases} a+b &= 0 \\ -a &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= -1 \\ b &= 1 \end{cases}$$

   Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\dfrac{1}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.

   c) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $s_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
   On écrit successivement $\dfrac{1}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ pour k variant de 2 à n :
   - pour $k = 1$: $\dfrac{1}{2(2-1)} = -\dfrac{1}{2} + 1$
   - pour $k = 3$: $\dfrac{1}{3(3-1)} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}$
   - pour $k = 4$: $\dfrac{1}{4(4-1)} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}$
   - ...
   - pour $k = n-1$: $\dfrac{1}{n-1(n-2)} = -\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n-2}$
   - pour $k = n$: $\dfrac{1}{n(n-1)} = -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1}$

   On ajoute membre à membre ces n égalités :

$$s_n = \frac{1}{2(2-1)} + \frac{1}{3(3-1)} + \frac{1}{4(4-1)} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{n}$$

   pour tout entier $n \geq 2$, $s_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

d) Déterminer la limite de (s_n).

$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = 1}$$

À partir de quel n a-t-on $1 - s_n < 10^{-5}$?

$1 - s_n < 10^{-5} \iff 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 10^{-5} \iff \frac{1}{n} < 10^{-5} \iff n > 10^5$

$$\boxed{1 - s_n < 10^{-5} \text{ dès que } n > 10^5.}$$

2. Étude de (S_n).

a) Étudier les variations de (S_n).

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

On étudie le signe de $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

Ayant pour tout entier n, $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$:

$$\boxed{\text{La suite } (S_n) \text{ est strictement croissante .}}$$

b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $S_n \leq 1 + s_n$. En déduire : $S_n \leq 2$.

On montre que pour tout $k \geq 2$; on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ En effet ; si $k \geq 2$ alors $k \geq k-1 > 0$

On multiplie par $k > 0$, $k^2 \geq k(k-1) > 0$ La fonction inverse étant strictement croissante sur $]0;+\infty[$:

si $k \geq 2$ $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

On écrit cette inégalité pour k variant de 2 à n :

- ✍ pour $k = 2$: $\frac{1}{1^2} \leq 1$
- ✍ pour $k = 2$: $\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{2(2-1)} = -\frac{1}{2} + 1$
- ✍ pour $k = 3$: $\frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{3(3-1)} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$
- ✍ pour $k = 4$: $\frac{1}{4^2} \leq \frac{1}{4(4-1)} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$
- ✍ …
- ✍ pour $k = n-1$: $\frac{1}{(n-1)^2} \leq \frac{1}{n-1(n-2)} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}$
- ✍ pour $k = n$: $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$

On ajoute membre à membre ces n égalités :

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + s_n$

Soit $S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 2 \text{ ; on a } S_n \leq 2 \text{ ; la suite } (S_n) \text{ est majorée par 2.}}$$

c) Montrer que (S_n) converge vers une limite ℓ.

La suite (S_n) est strictement croissante et majorée par 2.

Or toute suite croissante et majorée est convergente, ainsi la suite (S_n) converge vers une limite ℓ.

d) Écrire l'algorithme d'un programme qui saisit un entier $n \geq 1$ et affiche S_n.

Algorithme écrit sous XCAS :

1

```
sompour(n) :={
local j,s :=0 ;
pour j de 1 jusque n faire
   s :=s+1/j^2 ;
fpour
retourne s ;
}
```

$$\text{expr}((n)->\{\text{localj},(s:=0);\text{pourjde1jusquenfaires}:=s+1/j\hat{}2\text{fpour};;\text{return}(s);\},0) \tag{1}$$

2 `sompour(2);`

$$\frac{5}{4} \tag{2}$$

3 `sompour(20);`

$$\frac{17299975731542641}{10838475198270720} \tag{3}$$

4 `evalf(sompour(1000));`

$$1.643935 \tag{4}$$

5 `evalf(sqrt(6*sompour(100)));`
3.1406

Il semble que $\sqrt{6\,S_{1\,000}} \approx \pi$
Ainsi on conjecture que comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$, on a d'après les théorèmes sur limites et opérations $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{6S_n} = \sqrt{6\ell}$
Ainsi $\sqrt{6\ell} = \pi$ d'où $6\ell^2 = \pi^2$; ainsi :

$$\boxed{\ell = \frac{\pi^2}{6}}$$

Exercice 2 Comment fonctionne la touche `Frac` ?

L'objectif est d'écrire le nombre 0,27272727… sous forme de fraction.
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}27$ et de raison $\frac{1}{100}$.
Soit (s_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 ainsi que s_0,s_1,s_2 et s_3. On exprimera les résultats sous forme de nombres décimaux. (avec virgules)

   - ✍ $s_0 = u_0 = 0{,}27$
   - ✍ $u_1 = q \times u_0 = \frac{1}{100} \times 0{,}27 = 0{,}0027$
     et $s_1 = u_0 + u_1 = 0{,}0027$
   - ✍ $u_2 = q \times u_1 = \frac{1}{100} \times 0{,}0027 = 0{,}000027$
     et $s_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 0{,}272727$
   - ✍ $u_3 = q \times u_2 = \frac{1}{100} \times 0{,}000027 = 0{,}00000027$
     et $s_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 0{,}27272727$

2. Donner, sous forme décimale, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0{,}27272727\ldots$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer s_n en fonction de n.
   On a $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{Nombre de termes}}}{1 - \text{raison}} \times \text{Premier terme}$
   Ainsi $s_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{100}} \times 0{,}27 = \dfrac{1 - \left(10^{-2}\right)^{n+1}}{0{,}99} \times 0{,}27 = \frac{27}{99} \times \left[1 - \left(10^{-2}\right)^n \times 10^{-2}\right]$

4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ sous forme d'une fraction et conclure.
   Comme $-1 < 10^{-2} < 1$, on a on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(10^{-2}\right)^n = 0$
   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{27}{99} = \dfrac{3}{11}$

$$\boxed{0{,}27272727\cdots = \frac{3}{11}}$$

5. Imiter la démarche pour obtenir l'écriture de 0,481481481… sous forme de fraction.
   On a de même $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ où (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 0{,}481$ et de raison $\frac{1}{1000}$.
   On calcule $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{1000}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{100*0}} \times 0{,}481 = \dfrac{1 - \left(10^{-3}\right)^{n+1}}{0{,}999} \times 0{,}481 = \frac{481}{999} \times \left[1 - \left(10^{-3}\right)^n \times 10^{-3}\right]$
   Comme $-1 < 10^{-3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(10^{-3}\right)^n = 0$
   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{481}{999} = \dfrac{13}{27}$

$$\boxed{0,481481481\cdots = \frac{13}{27}}$$

Exercice 3 Une suite explicite

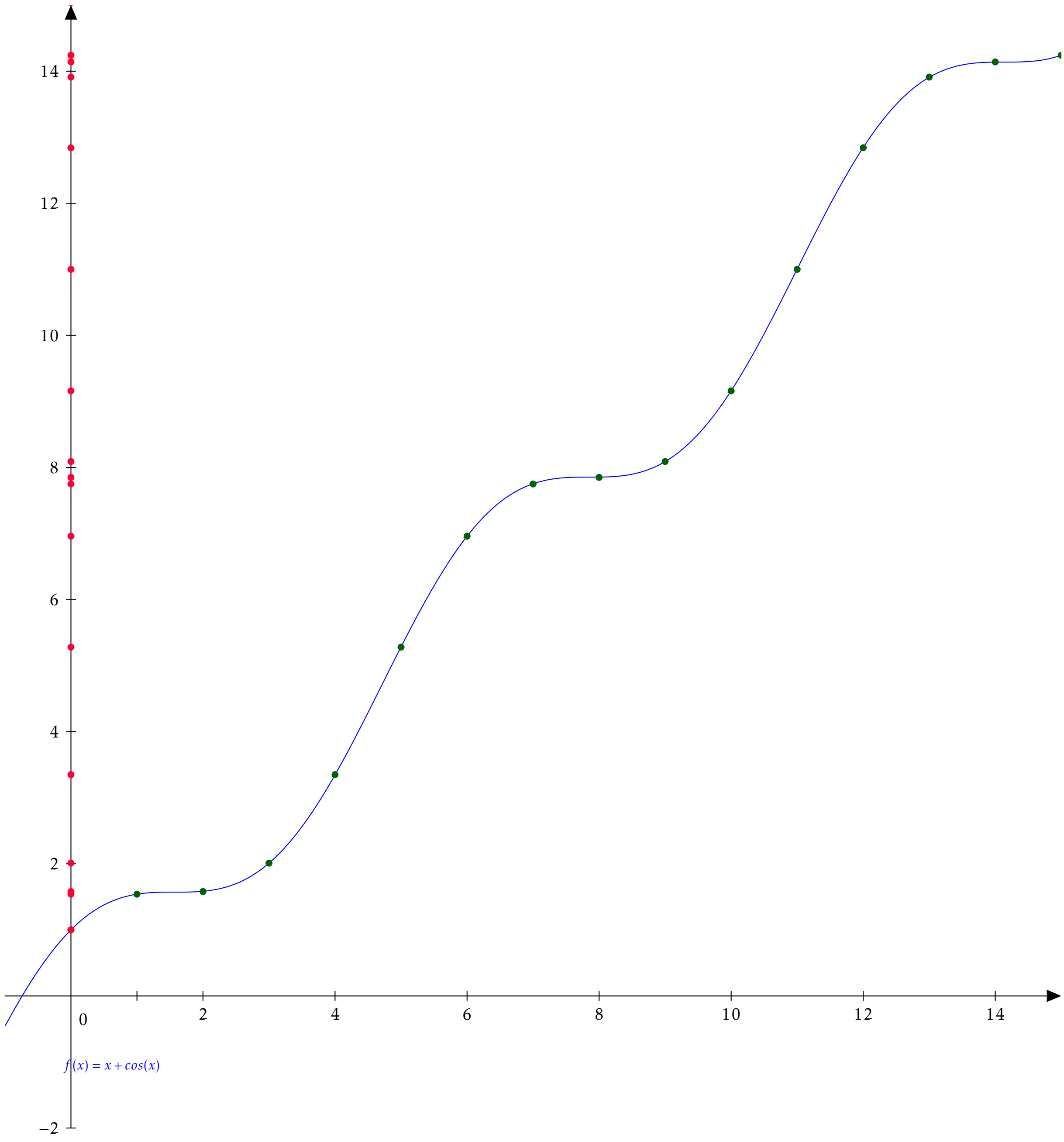
Soit (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n + \cos(n)$. Variations et limite de (u_n) ?

1. Limite :
   On a pour tout entier n : $\cos n \geq -1$
   donc $n + \cos(n) \geq n - 1$
   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 1 = +\infty$; on déduit d'après le théorème de minoration :
   $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$
2. Sens de variation :

   ✍ Comme (u_n) est une suite fonctionnelle, $u_n = f(n)$; on étudie le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$
   f est dérivable sur cet intervalle comme somme de deux fonctions dérivables ; de plus :
   $f'(x) = 1 - \sin x$
   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\sin x \leq 1$, donc $1 - \sin x \geq 0$
   Par ailleurs $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = 1 \Longleftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$
   La dérivée est donc strictement positive sauf en des valeurs isolées où elle s'annule donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

   ✍ f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, donc
   $$\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

Un dessin :


14
12
10
8
6
4
2
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
$f(x) = x + cos(x)$