

Nom :	DS 06	Mai 2021 <i>Devoir n° 06</i> .../...
Prénom :		

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 _____ **5,5 points**

- 1.5 pt **1** Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.
- 1 pt **2** **a.** Énoncer le critère d'arrêt pour qu'un nombre soit premier.
- 1.5 pt **b.** Démontrer que 419 est premier. On expliquera clairement la méthode utilisée.
- 1.5 pt **3** Décomposer 8 316 en facteurs premiers. Quel est alors le nombre de diviseurs de 8 316?

Exercice 2 Équation diophantienne _____ **7 points**

On considère l'équation (E) : $9x - 5y = 7$, où x et y sont des entiers relatifs.

- 1.5 pt **1** Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tels que $9u - 5v = 1$. Trouver un tel couple.
- 0.5 pt **2** En déduire une solution particulière de l'équation (E).
- 3 pts **3** Résoudre l'équation (E).
- 2 pts **4** Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite D d'équation cartésienne $9x - 5y = 7$.
On note \mathcal{C} l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $0 \leq x \leq 50$ et $0 \leq y \leq 50$. Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble \mathcal{C} et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

Exercice 3 : Une équation... _____ **2 points**

2 pts L'équation $n^4 - 8n^3 + 3n - 5 = 0$ a-t-elle des solutions dans \mathbb{Z} ?

Exercice 4 Un VRAI-FAUX ? _____ **9 points**

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

- 3 pts **Proposition 1** : « pour tout entier naturel n , 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».
- 3 pts **Proposition 2** : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \pmod{6}$ alors $x \equiv 0 \pmod{3}$ ».
- 3 pts **Proposition 3** : « l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4 + 10k; 9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».