Nom :	**DS 06**	Maths Expertes — Mai. 2021
Prénom :		Devoir n° 06 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 — 5,5 points

1.5 pt **1** Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.
Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers : $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n$.
Posons $N = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_i \times \ldots \times p_n + 1$
D'après le critère d'arrêt, N admet un diviseur premier.
Soit p_i ce diviseur premier.
p_i divise donc $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_i \times \ldots \times p_n$ et N.
Il divise donc la différence $N - (p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_i \times \ldots \times p_n) = 1$.
Ceci est impossible, donc l'hypothèse qu'il existe un nombre fini de nombres premiers est absurde.

1 pt **2** **a.** Énoncer le critère d'arrêt pour qu'un nombre soit premier.

Tout entier naturel $n, n \geq 2$, admet un diviseur premier.
Si n n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier p tel que : $2 \leq p \leq \sqrt{n}$.

1.5 pt **b.** Démontrer que 419 est premier. On expliquera clairement la méthode utilisée.
On a $20 < \sqrt{419} < 21$.
On teste tous les nombres premiers strictement inférieurs à 21, soit : 2, 3, 5 , 7,11,13,17 et 19.
Des règles de divisibilité, on déduit que 409 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 11.
En effectuant la division euclidienne de 419 par 7, on obtient : $419 = 7 \times 59 + 6$.
419 n'est donc pas divisible par 7.
En effectuant la division euclidienne de 419 par 13, on obtient : $419 = 13 \times 32 + 3$.
419 n'est donc pas divisible par 13.
En effectuant la division euclidienne de 419 par 17, on obtient : $419 = 17 \times 24 + 11$.
419 n'est donc pas divisible par 17.
En effectuant la division euclidienne de 419 par 13, on obtient : $419 = 19 \times 22 + 1$.
419 n'est donc pas divisible par 19.

Conclusion : comme 409 n'est pas divisible par 2, 3, 5 , 7,11,13,17 et 19, on déduit donc 419 est premier.

1.5 pt **3** Décomposer 8 316 en facteurs premiers. Quel est alors le nombre de diviseurs de 8 316 ?
Décomposons 8 316 en produit de facteurs premiers

8 316	2
2 079	2
2 079	3
693	3
231	3
77	7
11	11
1	

Ainsi on obtient la décomposition de 8 316 8 316 en facteurs premiers $8\,316 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11$.

On en déduit le nombre de diviseurs de 8 316. Un tel diviseur d a une décomposition en facterurs premiers de la forme :

$$d = 2^\alpha \times 3^\beta \times 7^\gamma \times 11^\epsilon$$

où $\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq 2 \\ 0 \leq \beta \leq 2 \\ 0 \leq \gamma \leq 1 \\ 0 \leq \epsilon \leq 1 \end{cases}$

$$\boxed{\text{Ainsi } 8\,316 \text{ admet } 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36 \text{ diviseurs.}}$$

Exercice 2 — 7 points

On considère l'équation (E) : $9x - 5y = 7$, où x et y sont des entiers relatifs.

1.5 pt **1** Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ tels que $9u - 5v = 1$. Trouver un tel couple.
Les nombres 9 et 5 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $9u + 5v = 1$ et donc le couple $(u;-v)$ est solution de l'équation $9u - 5v = 1$.

a	b	r		
9	5	4	$9 = 5 + 4$	L_1
5	4	1	$5 = 4 + 1$	L_2
4	1	0		

En posant $a = 9$ et $b = 5$, on obtient :

$$\begin{array}{lll} L_1 & \Longleftrightarrow & a = b + 4 \\ & \Longleftrightarrow & 4 = a - b \\ L_2 & \Longleftrightarrow & b = a - b + 1 \\ & \Longleftrightarrow & -a + 2b = 1 \end{array}$$

On a ainsi $9 \times (-1) - 5 \times (-2) = 1$
Le couple $(-1;-2)$ est donc un couple solution de l'équation $9u - 5v = 1$.

0.5 pt **2** En déduire une solution particulière de l'équation (E).
En multipliant l'égalité $9 \times (-1) - 5 \times (-2) = 1$ par 7, on obtient :
$9 \times (-7) - 5 \times (-14) = 7$.
Le couple $(-7;-14)$ est donc un couple solution de l'équation (E).

3 pts **3** Résoudre l'équation (E).

- ♡ Condition nécessaire : supposons que que $(x;y)$ soit un couple solution de (E) :
alors $9x - 5y = 7$
Or $9 \times (-7) - 5 \times (-14) = 7$
Ainsi on a : $9x - 5y = 9 \times (-7) - 5 \times (-14)$
donc $9(x + 7) = 5(y + 14)$ (3)
On en déduit que $9 \mid 5(y + 14)$
Or les nombres 5 et 9 étant premiers entre eux, le théorème de Gauss donne $9 \mid (y + 14)$
Ainsi on peut affirmer qu'il existe un entier k tel que : $y + 14 = 9k$ d'où $y = 9k - 14$
En reportant $y + 14 = 9k$ dans (3) on obtient : $9(x + 7) = 5 \times 9k$
soit $x + 7 = 5k$ ou encore $x = 5k - 7$
Donc les couples candidats à être solutions de (E) , sont : $(5k - 7; 9k - 14)$ où k désigne un entier relatif quelconque.
- ♡ Réciproque :
Pour $x = 5k - 7$ et $y = 9k - 14$, on calcule :

$$\begin{aligned} 9x - 5y &= 9(5k - 7) - 5(9k - 14) \\ &= 45k - 63 - 45k + 70 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Donc tous ces couples sont bien solutions de (E).

$$\mathcal{S} = \{(5k - 7; 9k - 14) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

2 pts **4** Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $9x-5y=7$.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $0\leq x\leq 50$ et $0\leq y\leq 50$. Déterminer le nombre de points de la droite $\mathcal{D}$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

$$\begin{aligned} 0\leq x\leq 50 &\iff 0\leq 5k-7\leq 50 \\ &\iff 7\leq 5k\leq 57 \\ &\iff \tfrac{7}{57}\leq k\leq \tfrac{57}{7} \\ &\iff 1\leq k\leq 11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0\leq y\leq 50 &\iff 0\leq 9k-14\leq 50 \\ &\iff 14\leq 9k\leq 64 \\ &\iff \tfrac{14}{9}\leq k\leq \tfrac{64}{9} \\ &\iff 2\leq k\leq 7 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0\leq x\leq 50 \\ 0\leq y\leq 50 \end{cases} \iff 2\leq k\leq 7$$

On a donc 6 choix de k tels que $0\leq x\leq 50$ et $0\leq y\leq 50$ donc $\mathcal{C}$ contient 6 points.

Exercice 3 : Une équation... — 2 points

2 pts L'équation $n^4-8n^3+3n-5=0$ a t-elle des solutions dans $\mathbb{Z}$?
Si n est une racine entière de l'équation alors :

$$\begin{aligned} n^4-8n^3+3n-5=0 &\implies n^4-8n^3+3n=5 \\ &\implies n(n^3-8n^2+3)=5 \end{aligned}$$

Comme n est entier ; on déduit que n^3-8n^2+3 est entier, ce qui permet d'affirmer que n est un diviseur de 5.
Ainsi , si n est une racine entière de l'équation (E) alors $n\in\{1;5;-1;-5\}$.
En programmant sur calculatrice la fonction $f: x\mapsto x^4-8x^3+3x-5$, on obtient le tableau de valeurs ci-dessous :

x	1	5	-1	-5
$f(x)$	-9	-365	1	1605

Donc aucun des candidats à être solution ne convient.

$$\boxed{\text{L'équation } n^4-8n^3+3n-5=0 \text{ n'a donc pas de solution dans } \mathbb{Z}.}$$

Exercice 4 Un VRAI- FAUX ? — 9 points

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

3 pts **Proposition 1 :** « pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n}-1$ ».

$$2^{2n}-1=\left(2^2\right)^n-1=4^n-1$$

Comme $4\equiv 1 \pmod 3$
D'après la propriété de compatibilité des congruences avec les puissances ; on déduit :

$$4^n\equiv 1^n \quad (\text{modulo } 3)$$

soit

$$4^n\equiv 1 \quad (\text{modulo } 3)$$

puis

$$4^n-1\equiv 0 \quad (\text{modulo } 3)$$

Ainsi 3 divise 4^n-1

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \text{ 3 divise le nombre } 2^{2n}-1.}$$

3 pts **Proposition 2 :** « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$ alors $x \equiv 0 \pmod 3$ ».

On fait un tableau de congruences modulo 6 :

$x \equiv \cdots [6]$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \cdots [6]$	0	1	4	3	4	1
$x^2 + x \equiv \cdots [6]$	0	2	0	0	2	0

Conclusion : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$ alors on n'a pas nécessairement $x \equiv 0 \pmod 3$ ». En effet si $x \equiv 2 \pmod 6$, on a $x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$ et
et si $x \equiv 2 \pmod 6$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2 + 6k = 2 + 3 \times 2k$ ainsi $x \equiv 2 \pmod 3$, et donc $x \not\equiv 0 \pmod 3$

La proposition 2 est fausse.

3 pts **Proposition 3 :** « l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples $(4 + 10k\,;\,9 + 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».
La proposition 3 est fausse ! En effet $12 \times (-1) - 5 \times (-3) = 3$. Le couple $(-1;-3)$ est donc une solution.
On montre qu'alors $(-1;-3) \notin \{(4 + 10k\,;\,9 + 24k);\ k \in \mathbb{Z}\}$