Nom :	DS 05	Maths Expertes — Av. 2021
Prénom :		Devoir n° 07 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

? Exercice 1 Applications du cours

5 pts **1** Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le pgcd de 217 et 34.

a	b	r	**Division euclidienne**	
217	34	13	$217 = 34 \times 6 + 13$	(1)
34	13	8	$34 = 13 \times 2 + 8$	(2)
8	5	3	$8 = 5 + 3$	(3)
5	3	2	$5 = 3 + 2$	(4)
3	2	1	$3 = 2 + 1$	(5)
2	1	0	$2 = 2 \times 1 + 0$	

Comme le pgcd est le dernier reste non nul dans cette suite de divisions euclidiennes ; on déduit :

$$\boxed{\text{pgcd}(217\,;34) = 1}$$

5 pts **2** Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $217u + 34v = 1$.
On a donc en posant $a = 217$ et $b = 34$:

$$\begin{array}{rll}
(1) & \iff & a = 6b + 13 \\
 & \iff & 13 = a - 6b \\
(2) & \iff & b = (a - 6b) + 8 \\
 & \iff & 8 = -2a + 13b \\
(3) & \iff & a - 6b = -2a + 13b + 5 \\
 & \iff & 5 = 3a - 19b \\
(4) & \iff & -2a + 13b = 3a - 19b + 3 \\
 & \iff & 3 = -5a + 32b \\
(5) & \iff & 3a - 19b = -5a + 32b + 2 \\
 & \iff & 2 = 8a - 51b \\
(6) & \iff & -5a + 32b = 8a - 51b + 1 \\
 & \iff & 1 = -13a + 83b
\end{array}$$

On peut vérifier : $2 \times 25 - 7 \times 7 = 1$

$$\boxed{\text{Le couple } (-13;83) \text{ est un couple solution de l'équation } 217x + 34y = 1.}$$

2 pts **3** Soient les entiers $a = 2n + 1$ et $b = n$. Montrer que a et b sont premiers entre eux pour tout entier relatif n.
On forme une combinaison linéaire de a et b permettant d'éliminer les n ...
Ici

$$\begin{aligned}
a - 2b &= 1 \times (2n + 1) - 2 \times (n) \\
&= 2n + 1 - 2n \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $a - 2b = 1$, et donc d'après le théorème de Bézout, on peut affirmer que les entiers a et b sont premiers entre eux.

? *Exercice 2 Équation diophantienne*

Soit l'équation (E) : $7x + 12y = 5$ où x et y sont des entiers relatifs.

1 pt **1** **a.** Montrer que l'équation (E) admet des solutions.

On utilise ici le corollaire de Bézout : L'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières si et seulement si c est un multiple du $pgcd(a, b)$.

Ici 7 et 12 sont premiers entre eux, donc $pgcd(7, 12) = 1$, 5 est bien un multiple de 1, donc l'équation (E) admet des solutions.

1 pt **b.** Déterminer une solution particulière de l'équation (E) : $7x + 12y = 5$

On voit facilement $7 \times (-1) + 12 \times 1 = 5$

$$\boxed{\text{Le couple } (-1; 1) \text{ est un couple solution de l'équation } 7x + 12y = 5.}$$

7 pts **2** Déterminer l'ensemble des couples $(x; y)$ solutions de l'équation (E).

- ♡ Condition nécessaire : supposons que que $(x; y)$ soit un couple solution de (E) :
  alors $7x + 12y = 5$
  Or $7 \times (-1) + 12 \times 1 = 5$
  Ainsi on a : $7x + 12y = 7 \times (-1) + 12 \times 1$
  donc $7(x + 1) = 12(-y + 1)$ $(\star)$
  On en déduit que $7 \mid 12(-y + 1)$ car $-y + 1$ est un entier.
  Or les nombres 7 et 12 étant premiers entre eux, le théorème de Gauss donne $7 \mid (-y + 1)$
  Ainsi on peut affirmer qu'il existe un entier k tel que : $-y + 1 = 7k$ d'où $y = -7k + 1$
  En reportant $y = -7k + 1$ dans $(\star)$ on obtient : $7 \times (x + 1) = 12 \times (-7k)$
  soit $x + 1 = 12k$ ou encore $x = 12k - 1$
  Donc les couples candidats à être solutions de (E) , sont : $(12k - 1; -7k + 1)$ où k désigne un entier relatif quelconque.
- ♡ Réciproque :
  Pour $x = 12k + 1$ et $y = -7k + 1$, on calcule :

$$\begin{aligned} 7x + 12y &= 7(12k - 1) + 12(-7k + 1) \\ &= 7 \times 12k + 7 \times (-1) - 12 \times 7k - 12 \times 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Donc tous ces couples sont bien solutions de (E).

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(12k + 1; -7k + 1) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}}$$