Nom :	DS 04	Maths Expertes — Fév. 2021
Prénom :		Devoir n° 07 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 : Une équation...

1 Déterminer les diviseurs de 33 dans $\mathbb{N}$.

2 Trouver tous les couples d'entiers naturels $(x;y)$ tels que : $x^2+xy=33$.

Exercice 2

Soit n un entier relatif.

1 Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n par 5.

2 Démontrer que $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5.

3 En déduire que n^5-n est divisible par 5 (on pourra développer $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$.

Exercice 3

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=1, v_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1}=2u_n+v_n \\ v_{n+1}=3u_n+4v_n \end{array}\right.$$

On admet que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n et v_n sont des entiers.
Le but de l'exercice est d'obtenir une expression de u_n et v_n en fonction de n grâce au calcul matriciel, et de mettre en évidence quelques propriétés de ces deux suites.
On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1 Soit n un entier naturel.

a. Justifier que $U_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b. Montrer que $U_{n+1}=AU_n$ où A est une matrice que l'on précisera.
On admet sans démonstration que pour tout entier naturel n on a : $\boldsymbol{U_n=A^nU_0}$.

c. Recopier l'algorithme suivant afin qu'il affiche en sortie les valeurs de u_N et v_N pour un entier naturel N saisi en entrée.
N et K sont des entiers naturels, U, V et$W$sont des entiers.
N est saisi par l'utilisateur.

```
Saisir la valeur de N
U ← 1
V ← 0
pour K allant de 1 à N faire
    W ← ···
    U ← 2W + V
    V ← ···
fin
Afficher U et V
```

2 **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3u_n - v_n = 3$.

b. Soit d un diviseur positif commun de u_n et v_n. Que peut-on affirmer sur d ?

3 Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

a. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}Q$.

b. Vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.