Nom :	DS 04	Maths Expertes — Fév. 2021
Prénom :		Devoir n° 07 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

Attention ! Le sujet est recto-verso.

? Exercice 1 : Une équation...

1 Déterminer les diviseurs de 33 dans $\mathbb{N}$.

$$\mathscr{D}\text{iv}(33) = \{1;3;11;33\}$$

2 Trouver tous les couples d'entiers naturels $(x;y)$ tels que : $x^2 + xy = 33$.

- Soit x un entier naturel solution, alors :
$$x^2 + xy = 33$$
$$x(x+y) = 33$$
Comme ici x et y sqont des entiers $x+y$ est un entier, donc x est un diviseur de 33.
Ainsi $x \in \{1;3;11;33\}$
- Réciproquemrent :
si $x = 1$, $x^2+xy = 33 \iff 1+y = 33$ ce qui donne $y = 32$ Le couple $(1;32)$ est solution car $1^2+1\times 32 = 33$.
si $x = 3$, $x^2+xy = 33 \iff 9+3y = 33$ ce qui donne $y = 8$ Le couple $(3;8)$ est solution car $3^2+3\times 9 = 33$.
si $x = 11$, $x^2+xy = 33 \iff 121+11y = 33$ ce qui donne $y = -8$ Le couple $(11;-8)$ n'est pas solution car x et y doivent être entiers naturels.
si $x = 33$, $x^2+xy = 33 \iff 1089+11y = 33$ ce qui donne $y = -96$ Le couple $(33;-96)$ n'est pas solution car x et y doivent être entiers naturels.

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(1;32);(3;8)\}}$$

? Exercice 2

1 Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n par 5.
En posant la division euclidienne de n par 5, on obtient $n = 5k + r$ où $0 \leq r < 5$, ainsi $r \in \{0;1;2;3;4\}$.

> Les restes possibles de la division euclidienne de n par 5 sont 0,1,2, 3 et 4.

2 Démontrer que $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5.
On remplit un tableau de congruences :

$n \equiv \cdots (5)$	0	1	2	3	4
$n-1 \equiv \cdots (5)$	-1	0	1	2	3
$n-2 \equiv \cdots (5)$	-2	-1	0	1	2
$n+1 \equiv \cdots (5)$	1	2	3	4	0
$n+2 \equiv \cdots (5)$	2	3	4	0	1
$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \equiv \cdots (5)$	0	0	0	0	0

On montre ainsi que pour tout entier naturel n, on a $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \equiv 0(5)$.
Ce qui prouve pour tout entier naturel n ; que $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5.

3 En déduire que n^5-n est divisible par 5 (on pourra développer $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$.

$$\begin{aligned}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) &= (n-2)(n+2)(n-1)(n+1)n\\ &= n(n^2-4)(n^2-1)\\ &= n(n^4-5n^2+4)\\ &= n^5-5n^3+4n\end{aligned}$$

D'après la question précédente $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5 ;
Donc il existe un entier relatif k tel que :

$$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) = 5$$

$$n^5-5n^3+4n = 5k$$

$$n^5-n = 5n^3+5k+5n$$

$$n^5-n = 5(n^3+k+n)$$

Comme n et k sont des entiers ; on déduit que (n^3+k+n) est entier, ce qui prouve que n^5-n est divisible par 5.

? *Exercice 3*

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=1, v_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n+v_n \\ v_{n+1} = 3u_n+4v_n \end{cases}$$

On admet que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n et v_n sont des entiers.
Le but de l'exercice est d'obtenir une expression de u_n et v_n en fonction de n grâce au calcul matriciel, et de mettre en évidence quelques propriétés de ces deux suites.
On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1 Soit n un entier naturel.

a. Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déjà $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, or d'après l'énoncé $n=0$ dans les relations : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n+v_n \\ v_{n+1} = 3u_n+4v_n \end{cases}$ fournit :
$\begin{cases} u_1 = 2u_0+v_0 = 2\times 1+0 = 2 \\ v_1 = 3u_0+4v_0 = 3\times 1+0 = 3 \end{cases}$

Ainsi $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b. Montrer que $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice que l'on précisera.
On admet sans démonstration que pour tout entier naturel n on a : $\boldsymbol{U_n = A^nU_0}$.

$$\begin{aligned}U_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 2u_n+v_n \\ 3u_n+4v_n \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\\ &= AU_n \textbf{ où } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

c. Recopier l'algorithme suivant afin qu'il affiche en sortie les valeurs de u_N et v_N pour un entier naturel N saisi en entrée.
N et K sont des entiers naturels, U, V et W sont des entiers.
N est saisi par l'utilisateur.

```
Saisir la valeur de N
U ← 1
V ← 0
pour K allant de 1 à N faire
    W ← ···
    U ← 2W + V
    V ← ···
fin
Afficher U et V
```

```
Saisir la valeur de N
U ← 1
V ← 0
pour K allant de 1 à N faire
    W ← U
    U ← 2W + V
    V ← 3W + 4V
fin
Afficher U et V
```

2 **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3u_n - v_n = 3$.
Notons $Q(n)$ la propriété $3u_n - v_n = 3$.

- Initialisation : comme $3u_0 - v_0 = 3 \times 1 - 0 = 3$; la propriété est vraie au rang 0.

- Transmission de l'hérédité :
soit $k \geq 0$, on suppose que $3u_k - v_k = 3$ **HR** ; on doit prouver que la propriété est vraie au rang $k+1$; c'est-à-dire : $3u_{k+1} - v_{k+1} = 3$

$$\begin{aligned} 3u_{k+1} - v_{k+1} &= 3(2u_k + v_k) - (3u_k + 4v_k) \\ &= 6u_k + 3v_k - 3u_k - 4v_k \\ &= 3u_k - v_k \\ &= 3 \qquad \textbf{d'après HR} \end{aligned}$$

- Conclusion : On a donc vérifié que la propriété est vraie au rang 0 et qu'il y a transmission de l'hérédité ; le théorème de récurrence s'appliquant, on a pour tout $n \geq 0$, $3u_n - v_n = 3$

b. Soit d un diviseur commun de u_n et v_n. Que peut-on affirmer sur d ?
Si d est un diviseur commun de u_n et v_n, , alors $\begin{cases} d \mid u_n \\ d \mid v_n \end{cases}$
on déduit donc que d divise toute combinaison linéaire de u_n et v_n :

Ainsi

$$d \mid 3u_n + (-1)v_n$$

Soit

$$d \mid 3$$

Ainsi si d est un diviseur positif commun des deux nombres entiers u_n et v_n alors $d \mid 3$; Comme $\text{Div}(3) = \{1, 3\}$.

$\boxed{\text{Les seuls diviseurs communs possibles à } u_n \text{ et } v_n \text{ sont 1 et 3.}}$

3 Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

a. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}Q$.

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\times 3 + \frac{1}{4}\times 3 & \frac{3}{4}\times(-1) + \frac{1}{4}\times 3 \\ -\frac{3}{4}\times 3 + \frac{3}{4}\times 3 & -\frac{3}{4}\times(-1) + \frac{3}{4}\times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{12}{4} & 0 \\ 0 & \frac{12}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3I_2 \end{aligned}$$

Déjà comme $\text{dét}(P) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right) == \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, on déduit $\text{dét}(P) \neq 0$ et donc P est inversible. Comme $PQ = 3I_2$, on déduit que $P \cdot \left(\frac{1}{3}Q\right) = I_2$

$$\boxed{\text{Donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{3}Q = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

b. Vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 60 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{P^{-1}AP \text{ est une matrice diagonale } D \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

c. Démontrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établissons l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
$A^n = P{\cdot}D^n{\cdot}P^{-1}$.

- Initialisation : comme $A^0 = I_2$; et $P{\cdot}D^0{\cdot}P^{-1} = P{\cdot}I_2{\cdot}P^{-1} = P{\cdot}P^{-1} = I_2$; ainsi la propriété est vraie au rang 0.

- Transmission de l'hérédité :
  soit $k \geq 0$, on suppose que $A^k = P{\cdot}D^k{\cdot}P^{-1}$; on doit prouver que la propriété est vraie au rang $k+1$; c'est-à-dire : $A^{k+1} = P{\cdot}D^{k+1}{\cdot}P^{-1}$

$$
\begin{aligned}
A^{k+1} &= A^k \cdot A \\
&= P{\cdot}D^k{\cdot}P^{-1} \cdot P{\cdot}D{\cdot}P^{-1} \quad \textbf{d'après HR et on a vu } A = P{\cdot}D{\cdot}P^{-1} \\
&= P{\cdot}D^k{\cdot}I_2{\cdot}D{\cdot}P^{-1} \\
&= P{\cdot}D^k{\cdot}D{\cdot}P^{-1} \\
&= P{\cdot}D^{k+1}{\cdot}P^{-1}
\end{aligned}
$$

- Conclusion : On a donc vérifié que la propriété est vraie au rang 0 et qu'il y a transmission de l'hérédité ; le théorème de récurrence s'appliquant, on a pour tout $n \geq 0$, $A^n = P{\cdot}D^n{\cdot}P^{-1}$