Nom : .... Prénom :	DS 03	Maths Expertes Oisolet — Déc. 2020 Devoir n° 06 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

1 Justifier que le produit AB est possible.
Le produit AB est possible car le nombre de colonnes de la matrice A est égale au nombre de lignes de la matrice B.
Une matrice (3 ;3) par une matrice (3 ;2) donne une (3 ;2)

2

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5+4+4 & 0-6+2 \\ 22 & -1 \\ 5 & 0+3+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 2

On souhaite montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse de deux manières différentes :

Première méthode :

1 Calculer $\det(A)$ et en déduire que A est inversible.
$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times 0 - 3 \times 1 = -3$
Comme $\det(A) \neq 0$, on déduit que A est inversible.

2 Calculer A^{-1} en détaillant les étapes.
On utilise le résultat suivant :
Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et si $\det(A) \neq 0$ alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
Ici $A^{-1} = \dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}$$

Deuxième méthode :

1 Montrer qu'il existe deux entiers α et β, tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ où I_2 est la matrice identité.

- $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$
- On remarque que $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A + 3I_2$

$$\boxed{A^2 = 2A + 3I_2}$$

2 En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

$$\begin{aligned} A^2 = 2A + 3I_2 &\iff A^2 - 2A = 3I_2 \\ &\iff A(A - 2I_2) = 3I_2 \\ &\iff A \times \frac{1}{3}(A - 2I_2) = I_2 \end{aligned}$$

On montre de même que $\frac{1}{3}(A - 2I_2) \times A = I_2$

$$\boxed{\text{On a donc } A \times \frac{1}{3}(A - 2I_2) = \frac{1}{3}(A - 2I_2) \times A = I_2, \text{ donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I_2)}$$

$$\frac{1}{3}(A - 2I_2) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

? Exercice 3

On considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 5x - y = -\dfrac{17}{2} \\ -2x + 3y = 10 \end{cases}$$

1 En posant $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et B une matrice 2×1 à déterminer, montrer soigneusement que le système (S) est équivalent à l'égalité $AX = B$.

Il suffit de remarquer que $AX = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - y \\ -2x + 3y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} 5x - y = -\dfrac{17}{2} \\ -2x + 3y = 10 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} 5x - y \\ -2x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{17}{2} \\ 10 \end{pmatrix} \\ &\iff AX = B \end{aligned}$$

où $B = \begin{pmatrix} -\dfrac{17}{2} \\ 10 \end{pmatrix}$

2 Calculer A^{-1} à l'aide de la calculatrice.

On obtient $A^{-1} = \dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

3 Montrer que $X = A^{-1}B$.

$$\begin{aligned} AX = B &\iff A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \text{en multipliant à gauche par } A^{-1} \\ &\iff I_2X = A^{-1}B \\ &\iff X = A^{-1}B \end{aligned}$$

4 En déduire la résolution de (S).

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &\iff X = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{17}{2} \\ 10 \end{pmatrix} \\ &\iff X = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3\times\left(-\frac{17}{2}\right)+1\times 10 \\ 2\times\left(-\frac{17}{2}\right)+5\times 10 \end{pmatrix} \\ &\iff X = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -\frac{31}{2} \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{31}{26} \\ \frac{33}{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{31}{26}; \frac{33}{13}\right)\right\}}$$

? Exercice 4

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1 Calculer J^2 et J^3 . En déduire une relation simple entre J^n et J, pour tout n, entier naturel.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = J^2 \times J = 2J \times J = 2J^2 = 2\times 2J = 4J = 2^2J$$

D'une façon générale, on montre avec une récurrence évidente $J^n = 2^{n-1}J$.

2 Exprimer A, A^2 et A^3 en fonction de I et J.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $A = I + 2J$

$$A^2 = (2J+I)^2 = (2J+I)(2J+I) = 4J^2 + 2J + 2J + I = 4\times 2J + 4J + I = 12J + I$$

$$A^3 = A^2 \times A = (12J+I)(2J+I) = 24J^2 + 12J + 2J + J = 48J + 14J + I = I + 62J$$

$$\boxed{A^2 = 12J + I \text{ et } A^3 = 62J + I}$$

3 Montrer pour tout n entier naturel que $A^n = I + \frac{5^n-1}{2}J$

Montrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $A^n = I + \frac{5^n-1}{2}J$ ».

✍ ***Initialisation :***

$A^0 = I$ et $I + \frac{5^0-1}{2}J = I$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

✍ ***Hérédité :*** soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $A^k = I + \frac{5^k-1}{2}J$.(HR)

$$\begin{aligned}
A^{k+1} &= A^k \times A \\
&= \left(I + \frac{5^k-1}{2}J\right) \times (2J+I) && \text{d'après (HR) et } A = 2J+I \\
&= 2J + I + \frac{5^k-1}{2} \times 2J^2 + \frac{5^k-1}{2}J \\
&= 2J + I + (5^k-1)(2J) + \frac{5^k-1}{2}J && \text{car } J^2 = 2J \\
&= \left(2 + 2\times 5^k - 2 + \frac{5^k-1}{2}\right)J + I \\
&= \left(\frac{4\times 5^k}{2} + \frac{5^k-1}{2}\right)J + I \\
&= \frac{5\times 5^k-1}{2}J + I \\
&= \frac{5^{k+1}-1}{2}J + I
\end{aligned}$$

✍ ***Conclusion :*** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n, on a $A^n = I + \frac{5^n-1}{2}J$.

? Exercice 5 Bonus

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

1 Calculer A^2. Que peut-on dire de la matrice A ?

$$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On $A^2 = I_3$, donc A est sa propre matrice inverse !

2 En déduire la matrice X telle que $AX = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
AX = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} &\iff A^2X = A\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} && \text{en multipliant à gauche par } A \\
&\iff I_3X = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} 5+6+32 & -5+4+40 \\ -4-9-32 & 4-6-40 \\ 4+6+28 & -4+4+35 \end{pmatrix} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} 43 & 39 \\ -45 & -42 \\ 38 & 35 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 43 & 39 \\ -45 & -42 \\ 38 & 35 \end{pmatrix}}$$