| | | |
|---|---|---|
| *Nom :* ........................ <br> *Prénom :* ........................ | **DS 01** | Maths Expertes — *Oct. 2020* <br> *Devoir n° 02* ..../... |

*Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation.* ***Faites des phrases claires et précises.***

## ? Exercice 1

3 pts

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :( détailler les calculs !)

$$(2+3i)^2, \quad \frac{1}{1+i}, \quad \frac{2+i}{2-4i}, \quad \frac{1}{2+i}+\frac{1}{2-i}.$$

$$\begin{aligned}(2+3i)^2 &= 2^2+2\times 2\times 3i+(3i)^2\\ &= 4+12i+9i^2\\ &= 4-9+12i\\ &= -5+12i\end{aligned}$$

$$\boxed{(2+3i)^2=-5+12i}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i} &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)}\\ &= \frac{1-i}{1^2+1^2}\\ &= \frac{1-i}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{2+i}{2-4i} &= \frac{(2+i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}\\ &= \frac{1-i}{2^2+4^2}\\ &= \frac{4+8i+2i-4}{20}\\ &= \frac{i}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{2+i}{2-4i}=\frac{i}{2}}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+i}+\frac{1}{2-i} &= \frac{2-i+2+i}{(2+i)(2-i)}\\ &= \frac{4}{2^2+1^2}\\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2+i}+\frac{1}{2-i}=\frac{4}{5}}$$

## ? Exercice 2

3 pts Soit $z\in\mathbb{C}$. On pose $z=x+iy$ où $x$ et $y$ désignent des nombres réels.Exprimer $Re(iz)$, $Im(iz)$, $Re(\overline{z})$,$Im(\overline{z})$ $Re(z^2)$, $Im(z^2)$ en fonction de $x$ et $y$.

- $iz=i(x+iy)=ix+i^2y=-y+ix$

$$\boxed{Re(iz)=-y \text{ et } Im(iz)=x}$$

- $\overline{z}=x-iy$

$$\boxed{Re(\overline{z})=x \text{ et } Im(\overline{z})=-y}$$

- $z^2=(x+iy)^2=x^2+2x\times iy+(iy)^2=x^2-y^2+i\times 2xy$

$$\boxed{Re(z^2)=x^2-y^2 \text{ et } Im(z^2)=2xy}$$

## ? Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

$(E_1)$ : $-3\mathrm{i}\overline{z}+3=\mathrm{i}$;

$$-3\mathrm{i}\overline{z}+3=\mathrm{i} \iff \overline{z}=\frac{-3+\mathrm{i}}{-3\mathrm{i}}=\frac{(-3+\mathrm{i})\mathrm{i}}{-3\mathrm{i}^2}=\frac{-1-3\mathrm{i}}{3}$$

$$\overline{z}=\frac{-1-3\mathrm{i}}{3} \text{ d'où } z=\frac{-1+3\mathrm{i}}{3}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{-1+3\mathrm{i}}{3}\right\}}$$

$(E_2)$ : $2\mathrm{i}z - \bar{z} = 2$;
On pose $z = x + iy$
$2iz - \bar{z} = 2 \Longleftrightarrow 2i(x+iy) - (x-iy) = 2$
$2ix - 2y - x + iy = 2$
$-x - 2y + i(2x+y) = 2$
En identifiant partie réelle et partie imaginaire il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} -x-2y=2 \\ 2x+y=0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x=2 \\ y=-2x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{2-4\mathrm{i}}{3}\right\}}$$

## ? Exercice 4

2 pts Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} i^k$. Mettre le résultat sous forme algébrique.

- Méthode 1 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{10} i^k &= i^0 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} \\ &= 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 + i - 1 \\ &= i \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{10} i^k = i}$$

- Méthode 2 : $S$ est la somme de 11 termes de la suite géométrique de premier terme $i^0 = 1$ de raison $i$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{10} i^k &= \left(\frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes de la somme}}}{1-\text{raison}}\right) \times \text{premier terme} \\ &= \frac{1-i^{11}}{1-i} \times 1 \\ &= \frac{1+i}{1-i} \\ &= \frac{(1+i)^2}{1^2+1^2} \\ &= i \end{aligned}$$

## ? Exercice 5

Soit l'équation dans $\mathbb{C}$ suivante :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$$

1 pt **1** Montrer que $i$ est solution de l'équation.
Posons $P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i$

$$\begin{aligned}
P(i) &= i^3-(4+i)i^2+(13+4i)i-13i\\
&= -i-(4+i)(-1)+13i-4-13i\\
&= -i+4+i-4\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(i)=0, \text{ donc } i \text{ est solution de l'équation.}}$$

2 pts **2** Déterminer les réels $a, b$ et $c$ tels que :

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(az^2+bz+c)$$

Comme $i$ est une racine de $P$, le polynome $P(z)$ se factorise par $z-i$.
Ainsi on peut affirmer l'existence de *nombres complexes* $a, b$ et $c$ tels que $P(z)=(z-i)(az^2+bz+c)$. On développe $(z-i)(az^2+bz+c)$

$$\begin{aligned}
(z-i)(az^2+bz+c) &= az^3+bz^2+cz-iaz^2-ibz-ic\\
&= az^3+(b-ia)z^2+(c-ib)z-ic\\
&= z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i
\end{aligned}$$

En identifiant les termes de même degré, il vient :

$$\begin{cases} a=1\\ b-ia=-4-i\\ c-ib=13+4i\\ -ic=-13i \end{cases} \iff \begin{cases} a=1\\ b=ia-4-i=i-4-i=-4\\ c=ib+13+4i=-4i+13+4i=13\\ c=13 \end{cases}$$

$$\boxed{P(z)=z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(z^2-4z+13)}$$

2 pts **3** Résoudre alors cette équation.

$$\begin{aligned}
P(z)=0 &\iff (z-i)(z^2-4z+13)=0\\
&\iff (z-i)=0 \text{ ou } \left(z^2-4z+13\right)=0
\end{aligned}$$

On résout l'équation du second degré : $z^2-4z+13=0$ $\Delta=b^2-4ac=16-52=36$
Comme $\Delta<0$, l'équation a deux racines complexes conjuguées.

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} & z_2 &= \overline{z_1}\\
&= \frac{4+6i}{2} & &= 2+3i\\
&= 2-3i
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\{i;2+3i;2-3i\}}$$

## ? Exercice 6

Soient les nombres complexes : $z_1=-2i$ et $z_2=-1+i\sqrt{3}$.

**1** Calculer $z_1\times\overline{z_2}$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.

$z_1\times\overline{z_2}=-2i\left(-1-i\sqrt{3}\right)=-2i+2\sqrt{3}$ ;

$$\boxed{z_1 \times \overline{z_2} = -2\sqrt{3} + 2i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2i}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{-2i\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)} = \frac{-2\sqrt{3}+2i}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2};$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}}$$

**2** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :$z^2 - 2z + 2 = 0$.
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4$.Comme $\Delta < 0$ ; l'équation a deux racines complexes conjuguées :

$$z' = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2+2i}{2} = 1+i \text{ et } z'' = \overline{z'} = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 1-i$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1+i; 1-i\}}$$

**3** Déterminer le nombre complexe $z_3$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme avec $A$ d'affixe $z_1$, $B$ d'affixe $z_2$, $C$ d'affixe $z_3$ et $D$ d'affixe $z_4 = \overline{z_2}$ .
$ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\begin{aligned}
(1) &\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\
(1) &\iff z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \\
(1) &\iff z_B - z_A = z_C - z_D \\
(1) &\iff z_C = z_B - z_A + z_D = -1 + i\sqrt{3} + 2i - 1 - i\sqrt{3} = -2 + 2i
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_C = -2 + 2i}$$

**4** **Bonus ! ( 3 points)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 + (-2+i)z^2 + 2(1-i)z + 2i = 0$$

sachant qu'il y a une racine imaginaire pure.
$z = iy$ est une solution de $z^3 + (-2+i)z^2 + 2(1-i)z + 2i = 0\,(1)$

$$\begin{aligned}
(1) &\iff (iy)^3 + (-2+i)(iy)^2 + 2(1-i)(iy) + 2i = 0 \\
(1) &\iff -iy^3 + (-2+i)\left(-y^2\right) + (2-2i)(iy) + 2i = 0 \\
(1) &\iff -iy^3 + 2y^2 - iy^2 + 2iy + 2y + 2i = 0 \\
(1) &\iff \left(2y^2 + 2y\right) + i\left(-y^3 - y^2 + 2y + 2\right)
\end{aligned}$$

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles :; on est ainsi ramené à résoudre le système : $(1) \iff \begin{cases} 2y^2 + 2y = 0\ (L_1) \\ -y^3 - y^2 + 2y + 2 = 0\ (L_2) \end{cases}$
$(L_1) \iff 2y(y+1) = 0 \iff y = 0$ ou $y = -1$.
En reportant $y = 0$ dans $(L_2)$ , on débouche sur une contradiction, alors que l'égalité $1 - 1 - 2 + 2 = 0$ est vraie.
Donc $z = -i$ est la seule racine imaginaire de cette équation.
Notons $P$ le polynôme de la variable $z$ défini par $P(z) = z^3 + (-2+i)z^2 + 2(1-i)z + 2i$.Comme $P(-i) = 0$; le polynôme $P(z)$ se factorise par $(z+i)$; ainsi il existe des nombres complexes $a, b$ et $c$ tels que :

$$P(z) = (z+i)\left(az^2 + bz + c\right)$$

$$\boxed{\text{On pose la division euclidienne !}}$$

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
z^3 & +(-2+i)z^2 & +(2-2i)z & +2i & z & +i & \\
\cline{5-7}
-z^3 & -iz^2 & & & z^2 & -2z & +2 \\
\cline{1-2}
 & -2z^2 & +(2-2i)z & +2i & & & \\
 & 2z^2 & +2iz & & & & \\
\cline{2-3}
 & & 2z & +2i & & & \\
 & & -2z & -2i & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Ainsi , $P(z)=(z+i)\left(z^2-2z+2\right)$.
$\Longleftrightarrow$ $(z-2i)=0$ ou $\left(z^2-2z+2\right)=0$

$$
\begin{aligned}
P(z)=0 \quad &\Leftrightarrow (z+i)=0 \quad \text{ou}\left(z^2-2z+2\right)=0 \\
P(z)=0 \quad &\Leftrightarrow z=-i \qquad \text{ou} z=1+i \text{ou} z=1-i
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\{-i;1+i;1-i\}}$$