Nom :	DM 02	Maths Expertes — Déc. 2020
Prénom :		Devoir n° 06 — .../...

*Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises**.*

? Exercice 1

136 DEVOIR MAISON [Chercher, Raisonner.]

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par :

$z_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = 3iz_n - 1$.

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$. Pour tout entier naturel n, on note M_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z = 3iz - 1$. On note A le point dont l'affixe est la solution de cette équation.

2. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) par $u_n = z_n + \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 3i \times u_n.$$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right) \times 3^n \times i^n$.

3. a. Démontrer que la distance AM_n diverge vers $+\infty$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, A, M_n et M_{n+2} sont alignés.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les droites (AM_n) et (AM_{n+1}) sont perpendiculaires.

? Exercice 2

On donne $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice identité de rang 3.

1. Calculer $J = B - I$.
2. Calculer, avec la calculatrice J^3, puis en déduire J^n pour $n \geq 3$.
3. Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier non nul, on a

$$B^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

4. Calculer J^2 et en déduire B^n en fonction de n.