Nom :	DM 02	Maths Expertes — Déc. 2020
Prénom :		Devoir n° 06 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

? Exercice 1

136 DEVOIR MAISON [Chercher, Raisonner.]

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par :
$z_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = 3\mathrm{i}z_n - 1$.
On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout entier naturel n, on note M_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z = 3\mathrm{i}z - 1$. On note A le point dont l'affixe est la solution de cette équation.

2. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) par $u_n = z_n + \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\mathrm{i}$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1} = 3\mathrm{i} \times u_n.$$

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\mathrm{i}\right) \times 3^n \times \mathrm{i}^n$.

3. a. Démontrer que la distance AM_n diverge vers $+\infty$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, A, M_n et M_{n+2} sont alignés.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les droites (AM_n) et (AM_{n+1}) sont perpendiculaires.

1

$$\begin{aligned} z = 3\mathrm{i}z - 1 &\Leftrightarrow z(1 - 3\mathrm{i}) = -1 \\ &\Leftrightarrow z = -\frac{1}{1-3\mathrm{i}} = -\frac{1}{10} - \frac{3}{10}\mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}\mathrm{i}\right\}}$$

2 **a.** Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= z_{n+1} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\mathrm{i} \\ &= 3\mathrm{i}z_n - \frac{9}{10} + \frac{3}{10}\mathrm{i} \\ &= 3\mathrm{i}\left(z_n + \frac{3}{10}\mathrm{i} + \frac{1}{10}\right) = 3\mathrm{i}u_n \end{aligned}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note P_n la proposition $u_n = \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\mathrm{i}\right) \times 3^n \times \mathrm{i}^n$. On souhaite démontrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ (initialisation) :
$\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}\right)\times 3^0\times \mathrm{i}^0 = \left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}\right)\times 1\times 1 = \frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i} = u_0$
On en déduit que P_0 est vraie.
On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), autrement dit tel que $\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}\right)\times 3^k\times \mathrm{i}^k$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}\right)\times 3^{k+1}\times \mathrm{i}^{k+1}$ (hérédité).

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3\mathrm{i}\times u_k \\ &= 3\mathrm{i}\times\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}\right)\times 3^k\times \mathrm{i}^k \quad \text{(par hypothese de recurrence)} \\ &= \left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}\right)\times 3^{k+1}\times \mathrm{i}^{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi, P_0 est vraie et, lorsque P_k est vraie pour un entier k quelconque, alors P_{k+1} est vraie aussi. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est vraie donc $u_n = \left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}\right)\times 3^n\times \mathrm{i}^n$.

3

a. La distance AM_n est égale à $|z_n - z_A| = |u_n| = \frac{3^n\sqrt{10}}{10}$.
On a $\lim 3^n = +\infty$ puisque $3 > 1$. Ainsi $\lim AM_n = +\infty$ et la distance AM_n diverge vers $+\infty$.

b. Pour tout entier naturel n, on a :
$z_{n+2} - z_A = u_{n+2} = 3\mathrm{i}u_{n+1} = 3\mathrm{i}\times 3\mathrm{i}u_n = -9u_n = -9(z_n - z_A)$.
Donc : $\overrightarrow{AM_{n+2}} = -9\overrightarrow{AM_n}$ et les points A, M_n et M_{n+2} sont alignés.

c. Pour tout entier naturel n, on a $z_{n+1} - z_A = u_{n+1} = 3\mathrm{i}u_n = 3\mathrm{i}(z_n - z_A)$.
Donc $\frac{z_{n+1}-z_A}{z_n - z_A} = 3\mathrm{i}$ et $\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_A}{z_n-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\times 2\pi ; k\in\mathbb{Z}$.
D'où : $\left(\overrightarrow{AM_n};\overrightarrow{AM_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\times 2\pi ; k\in\mathbb{Z}$. Les droites (AM_n) et (AM_{n+1}) sont donc perpendiculaires.

? Exercice 2

On donne $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice identité de rang 3.

1 Calculer $J = B - I$.

$$\begin{aligned} J &= B - I \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2 Calculer, avec la calculatrice J^3, puis en déduire J^n pour $n \geq 3$.

Avec la calculatrice, on obtient $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Ainsi $J^3 = O_3$ la matrice nulle , puis pour $n \geq 3$, on a : $J^n = J^3 \times J^{n-3} = O_3$.

3 Prouver, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier non nul, on a

$$B^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

Montrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $B^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}J^2$ ».

- ✍ ***Initialisation :***
  $B^1 = B$ et $= I + 1 \times J + \dfrac{1(1-1)}{2}J^2 = I + J = B$ car $J = B - I$
  Donc la propriété est vraie au rang 1.

- ✍ ***Hérédité :*** soit $k \geq 1$ un entier fixé. On suppose que $B^k = I + kJ + \dfrac{k(k-1)}{2}J^2$.(HR)

$$\begin{aligned}
B^{k+1} \quad & B \times B^k \\
& = (I+J)\left(I + kJ + \frac{k(k-1)}{2}J^2\right) && \text{car } B = I + J \\
& = I + kJ + \frac{k(k-1)}{2}J^2 + J + kJ^2 + \frac{k(k-1)}{2}J^3 \\
& = I + (k+1)J + \left(k + \frac{k(k-1)}{2}\right)J^2 && \text{car } J^3 = O_3 \\
& = I + (k+1)J + \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)J^2 && \text{car } J^3 = O_3
\end{aligned}$$

- ✍ ***Conclusion :*** La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier $n \geq 1$, on a « $B^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}J^2$ ».

4 Calculer J^2 et en déduire B^n en fonction de n.

$$\begin{aligned}
J^2 & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0-2+1 & 0+4-4 & 0+2-2 \\ 0+4-2 & 0-8+8 & 0-4+4 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^n & = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 \\
& = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & & 0 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n - \dfrac{n(n-1)}{2} & 1-2n & -n \\ -n + n(n-1) & 4n & 1+2n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(3-n)}{2} & 1-2n & -n \\ n^2 & 4n & 1+2n \end{pmatrix}}$$