Nom :	DM 01	Maths Expertes — SeptOct. 2020
Prénom :		Devoir n° 03 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1

135 [Calculer, Communiquer.]

On considère le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(z) = z^4 - 8z^3 + 41z^2 - 128z + 400$.

1. Montrer que si z est une racine du polynôme P, alors son conjugué $\overline{z}$ en est aussi une.

2. a. Soit b un réel. Déterminer $\mathrm{P}(ib)$ en fonction de b puis l'écrire sous forme algébrique .

b. Montrer que le polynôme P admet exactement deux racines imaginaires pures dans $\mathbb{C}$ et les calculer.

3. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, $\mathrm{P}(z) = (z^2 + 16)(az^2 + bz + c)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$.

Exercice 2

136 [Calculer, Chercher.]

1. On considère le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(u) = u^4 - 1$.

a. Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$ en produit de facteurs du premier degré à coefficients complexes.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{P}(u) = 0$.

2. On considère l'équation (E): $\left(\frac{1-2z}{z-2}\right)^4 = 1$.

En utilisant les résultats de la question **1. b.**, résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

? *Exercice 3*

140 [Chercher, Représenter.]

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle A le point de coordonnées $(2 ; 0)$.

À tout nombre complexe $z \neq 2$, on associe le nombre complexe $z' = \dfrac{2 - iz}{2 - z}$.

On écrit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels.

Soit $M(x ; y)$ un point du plan distinct de A et $M'(x' ; y')$ le point qui lui est associé par la transformation $z \mapsto z'$.

Le but de l'exercice est de déterminer la nature de l'ensemble des points M quand z' vérifie certaines conditions.

1. Soit B le point de coordonnées $(2 ; 1)$.

Déterminer les coordonnées $(x' ; y')$ du point B′, image du point B par la transformation définie précédemment.

2. Soit C′ le point de coordonnées $(1 ; 2)$.

Déterminer les coordonnées $(x ; y)$ du point C dont l'image est le point C′.

3. Calculer z' sous forme algébrique et exprimer sa partie réelle x' et sa partie imaginaire y' en fonction de x et y.

4. Déterminer une équation de l'ensemble E_1 des points $M(x ; y)$, distincts de A, tels que z' soit un réel et préciser sa nature.

5. Déterminer une équation de l'ensemble E_2 des points $M(x ; y)$, distincts de A, tels que z' soit un imaginaire pur et préciser sa nature.