Nom : .... *Prénom :*	**DM 01**	Maths Expertes — *SeptOct. 2020* *Devoir nº 03* — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

Attention ! Le sujet est recto-verso.

? *Exercice 1*

135 [Calculer, Communiquer.]

On considère le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 8z^3 + 41z^2 - 128z + 400$.

1. Montrer que si z est une racine du polynôme P, alors son conjugué $\overline{z}$ en est aussi une.

2. a. Soit b un réel. Déterminer $P(ib)$ en fonction de b puis l'écrire sous forme algébrique .

b. Montrer que le polynôme P admet exactement deux racines imaginaires pures dans $\mathbb{C}$ et les calculer.

3. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z^2 + 16)(az^2 + bz + c)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

1 Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P.
Alors $P(\overline{z}) = (\overline{z})^4 - 8(\overline{z})^3 + 41(\overline{z})^2 - 128\overline{z} + 400$
donc $P(\overline{z}) = \overline{(z)^4} - \overline{8} \times \overline{(z)^3} + \overline{41} \times \overline{(z)^2} - \overline{128} \times \overline{z} + \overline{400}$, car $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$ et le conjugué d'un réel est lui-même.
D'où $P(\overline{z}) = \overline{(z)^4} - \overline{8 \times (z)^3} + \overline{41 \times (z)^2} - \overline{128 \times z} + \overline{400}$, car le conjugué d'un produit est le produit des conjugués,
donc $P(\overline{z}) = \overline{z^4 - 8z^3 + 41z^2 - 128z + 400}$, car le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, et on en déduit ainsi que $P(\overline{z}) = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0$ car z est racine de P.

$\boxed{\text{En conclusion, si } z \in \mathbb{C} \text{ est une racine de } P\text{, alors son conjugué } \overline{z} \text{ en est une aussi.}}$

2 **a.** Soit $b \in \mathbb{R}$.
$P(ib) = (ib)^4 - 8(ib)^3 + 41(ib)^2 - 128(ib) + 400 = b^4 + 8ib^3 - 41b^2 - 128ib + 400$
donc $P(ib) = (b^4 - 41b^2 + 400) + i(8b^3 - 128b)$.

b. On cherche un réel$b$ tel que $P(ib) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 41b^2 + 400 = 0 \\ 8b^3 - 128b = 0 \end{cases}$.

Or, d'une part, en posant $b^2 = x \geqslant 0$, on a $b^4 - 41b^2 + 400 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$
de discriminant $\Delta = (-41)^2 - 4 \times 1 \times 400 = 81 = 9^2 > 0$.
Ainsi, $x^2 - 41x + 400 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{41 - 9}{2} = 16$ et $x_1 = \dfrac{41 + 9}{2} = 25$.
On en déduit que $b^4 - 41b^2 + 400 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 16$ ou $b^2 = 25$.

D'autre part, $8b^3 - 128b = 0 \Leftrightarrow 8b(b^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ou $b^2 = 16$.

Par conséquent, $P(ib) = 0 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = -4$ ou $b = 4$.

P admet donc exactement deux racines imaginaires pures : $-4i$ et $4i$.

3 On cherche les réels a, b et c tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$P(z) = \left(z^2+16\right)\left(az^2+bz+c\right) \Leftrightarrow az^4+bz^3+(16a+c)z^2+16bz+16c = z^4-8z^3+41z^2-128z+400$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ 16a+c=41 \\ 16b=-128 \\ 16c=400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c=25 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z^2+16)(z^2-8z+25)$.

4 $P(z)=0 \Leftrightarrow z^2+16=0$ ou $z^2-8z+25=0 \Leftrightarrow z=-4\mathrm{i}$ ou $z=4\mathrm{i}$ ou $z^2-8z+25=0$. Or $z^2-8z+25=0$ a pour discriminant $\Delta=(-8)^2-4\times1\times25=-36=(6\mathrm{i})^2<0$ donc $z^2-8z+25=0$ admet deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{8-6\mathrm{i}}{2}=4-3\mathrm{i}$ et $\overline{4-3\mathrm{i}}=4+3\mathrm{i}$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$S_{\mathbb{C}} = \{-4\mathrm{i}; 4\mathrm{i}; 4-3\mathrm{i}; 4-3\mathrm{i}\}.$$

? *Exercice 2*

136 [Calculer, Chercher.]

1. On considère le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P}(u)=u^4-1$.

a. Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$ en produit de facteurs du premier degré à coefficients complexes.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\mathrm{P}(u)=0$.

2. On considère l'équation (E): $\left(\dfrac{1-2z}{z-2}\right)^4=1$.

En utilisant les résultats de la question **1. b.**, résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

1 **a.** Pour tout $u \in \mathbb{C}$, $P(u)=u^4-1=\left(u^2\right)^2-1^2=(u^2-1)(u^2+1)=(u-1)(u+1)(u-\mathrm{i})(u+\mathrm{i})$.

b. Ainsi, l'ensemble des solutions de $(u)=0$ est $S_{\mathbb{C}}=\{-1;1;-\mathrm{i};\mathrm{i}\}$.

2 $(E): \left(\dfrac{1-2z}{z-2}\right)^4=1$ est définie si, et seulement si, $z \neq 2$.

D'après la question 1.b. :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1-2z}{z-2}=-1 \text{ ou } \frac{1-2z}{z-2}=1 \text{ ou } \frac{1-2z}{z-2}=-\mathrm{i} \text{ ou } \frac{1-2z}{z-2}=\mathrm{i}.$$

Or $\dfrac{1-2z}{z-2}=-1 \Leftrightarrow 1-2z=-z+2 \Leftrightarrow z=-1$,

$\dfrac{1-2z}{z-2}=1 \Leftrightarrow 1-2z=z-2 \Leftrightarrow z=1$,

$\dfrac{1-2z}{z-2}=-\mathrm{i} \Leftrightarrow 1-2z=-\mathrm{i}z+2\mathrm{i} \Leftrightarrow z=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} \Leftrightarrow z=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

et $\dfrac{1-2z}{z-2}=\mathrm{i} \Leftrightarrow 1-2z=\mathrm{i}z-2\mathrm{i} \Leftrightarrow z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \Leftrightarrow z=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$.

Toutes ces valeurs étant différentes de 2, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $S_{\mathbb{C}}=\left\{-1;1;\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i};\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}\right\}$.

? Exercice 3

140 [Chercher, Représenter.]

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On appelle A le point de coordonnées $(2\,;0)$.
À tout nombre complexe $z \neq 2$, on associe le nombre complexe $z' = \dfrac{2-\mathrm{i}z}{2-z}$.
On écrit $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ où x, y, x' et y' sont des nombres réels.
Soit $M(x\,;y)$ un point du plan distinct de A et $M'(x'\,;y')$ le point qui lui est associé par la transformation $z \mapsto z'$.
Le but de l'exercice est de déterminer la nature de l'ensemble des points M quand z' vérifie certaines conditions.

1. Soit B le point de coordonnées $(2\,;1)$.
Déterminer les coordonnées $(x'\,;y')$ du point B', image du point B par la transformation définie précédemment.

2. Soit C' le point de coordonnées $(1\,;2)$.
Déterminer les coordonnées $(x\,;y)$ du point C dont l'image est le point C'.

3. Calculer z' sous forme algébrique et exprimer sa partie réelle x' et sa partie imaginaire y' en fonction de x et y.

4. Déterminer une équation de l'ensemble E_1 des points $M(x\,;y)$, distincts de A, tels que z' soit un réel et préciser sa nature.

5. Déterminer une équation de l'ensemble E_2 des points $M(x\,;y)$, distincts de A, tels que z' soit un imaginaire pur et préciser sa nature.

1 $B(2;1)$ correspond à l'affixe $z_B = 2+\mathrm{i}$, d'où $z'_B = \dfrac{2-\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{2-(2+\mathrm{i})} = 2+3\mathrm{i}$.

Ainsi, $B'(2;3)$.

2 $C'(1;2)$ est l'image de $C(x;y)$ avec $z = x+\mathrm{i}y$ différent de 2, c'est-à-dire avec $(x;y) \neq (2;0)$.
Et $\dfrac{2-\mathrm{i}z}{2-z} = 1+2\mathrm{i} \Leftrightarrow 2-\mathrm{i}z = (1+2\mathrm{i})(2-z) \Leftrightarrow 2-\mathrm{i}z = 2-z+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}z \Leftrightarrow (1+\mathrm{i})z = 4\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{4\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{1^2+1^2} = 2+2\mathrm{i}$.

Ainsi, $C(2;2)$.

3 Soit $(x;y) \neq (2;0)$, on pose $z = x+\mathrm{i}y$. On a alors :

$$z' = \frac{2+y-\mathrm{i}x}{2-x-\mathrm{i}y} = \frac{[(2+y)-\mathrm{i}x][(2-x)+\mathrm{i}y]}{(2-x)^2+y^2}$$
$$= \frac{(2+y)(2-x)+xy}{(2-x)^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{(2+y)y-x(2-x)}{(2-x)^2+y^2}$$
$$= \frac{4-2x+2y-xy+xy}{(2-x)^2+y^2} + \mathrm{i}\frac{2y+y^2-2x+x^2}{(2-x)^2+y^2}.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } z' = x' + \mathrm{i}y' \text{ avec } x' = \frac{-2x+2y+4}{(2-x)^2+y^2} \text{ et } y' = \frac{x^2-2x+y^2+2y}{(2-x)^2+y^2}.}$$

4 Soit $M(x;y)$ distinct de $A(2;0)$, c'est-à-dire tel que $(x;y) \neq (2;0)$.
$M \in E_1 \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+2y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+1)^2-1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = 2.$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E_1 \text{ est le cercle de centre } \Omega(1;-1) \text{ et de rayon } \sqrt{2}, \text{ privé du point } A(2;0).}$$

5 Soit $M(x;y)$ distinct de $A(2;0)$, c'est-à-dire tel que $(x;y) \neq (2;0)$. $M \in E_2 \Leftrightarrow z' \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow x' = 0 \Leftrightarrow -2x+2y+4 = 0 \Leftrightarrow x-y-2 = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } E_2 \text{ est la droite d'équation cartésienne } x-y-2=0, \text{ privée du point } A(2;0).}$$