Nom :	**DS 03**	TS Spé Maths · Déc. 2019
Prénom :		Devoir n° 6 · .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1

2 pts **1** Citer le théorème de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et la puissance.

1 pt **2** Pré-requis :

$$a \equiv b \ (\text{ mod } n) \iff a - b \equiv 0 \ (\text{ mod } n)$$

Soit a, b, c et d quatre relatifs tels que :$a \equiv b$ (mod n) et $c \equiv d$ (mod n)
Montrer que : $a + c \equiv b + d$ (mod n)

2 pts **3** Application : Montrer que $4^4 \equiv 3$ (mod 11)
puis en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N};\ 4^{4n+2} - 3^{n+3} \text{ est divisible par } 11.$$

Exercice 2

1 pt **1** Soit x un entier relatif. Recopier et compléter le tableau suivant :

Modulo 4, x est congru à	0	1	2	3
Modulo 4, x^2 est congru à				

2 pts **2** On considère l'équation (F) : $7x^2 - 4y^2 = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.

Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 3 \pmod 4$.
En déduire que l'équation (F) n'a pas de solution.

1.5 pt **3** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x+3)^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Exercice 3

On considère un polynôme P à coefficients entiers relatifs :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \quad + a_1 x + a_0.$$

2 pts **1** Montrer que toute racine entière de P non nulle divise a_0.

1 pt **2** En déduire que le polynôme $x^3 - 2x^2 + 4x - 10$ n'a pas de racine entière.

? Exercice 4

4 pts Prouver par récurrence sur n que pour tout entier naturel n : $15^n - 2^{3n}$ est divisible par 7.

2 pts Prouver à l'aide des congruences que pour tout entier naturel n : $15^n - 2^{3n}$ est divisible par 7.

? Exercice 5

3 pts **1** Soit n un entier naturel.

- **a.** Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes de la division euclidienne de 3^n par 11.
- 1 pt **b.** En déduire que $2019^{2019} + 41$ est divisible par 11.

1.5 pt **2** A quelle condition la somme de cinq entiers consécutifs est- elle divisible par 10 ?

1.5 pt **3** Déterminer le reste de 555 444 333 222 111 dans la division euclidienne par 7.