Nom : .... Prénom :	**DS 03**	TS Spé Maths — Déc. 2019 — Devoir n° 6 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso).

Exercice 1

2 pts **1** Citer le théorème de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et la puissance.

- Compatibilité avec l'addition :
  Si $\left.\begin{array}{l} a \equiv b \text{ (mod. } n) \\ c \equiv d \text{ (mod. } n) \end{array}\right\}$ Alors $a+c \equiv b+d$ (mod. n)
- Compatibilité avec la multiplication :
  Si $\left.\begin{array}{l} a \equiv b \text{ (mod. } n) \\ c \equiv d \text{ (mod. } n) \end{array}\right\}$ Alors $a \times c \equiv b \times d$ (mod. n)
- Compatibilité avec la puissance :
  $\left.\begin{array}{l} \text{Si } a \equiv b \text{ (mod. } n) \\ \text{et si } k \in \mathbb{N} \end{array}\right\}$ Alors $a^k \equiv b^k$ (mod. n)

1 pt **2** Pré-requis :

$$a \equiv b \text{ (mod } n) \iff a-b \equiv 0 \text{ (mod } n)$$

Soit a, b, c et d quatre relatifs tels que :$a \equiv b$ (mod n) et $c \equiv d$ (mod n)
Montrer que : $a+c \equiv b = d$ (mod n)
Par hypothèse :

$$a \equiv b \text{ (mod } n) \iff a-b \equiv 0 \text{ (mod } n) \iff \text{il existe un entier } k \text{ tel que } a-b = k \times n \text{ (1)}$$

$$c \equiv d \text{ (mod } n) \iff c-d \equiv 0 \text{ (mod } n) \iff \text{il existe un entier } \ell \text{ tel que } c-d = \ell \times n \text{ (2)}$$

En ajoutant membre à membres les égalités (1) et (2), on obtient :

$$a-b+c-d = k \times n + \ell \times n$$

$$\text{Donc } a+c-(b+d) = (k+\ell) \times n$$

$$\text{soit } a+c-(b+d) \equiv 0 \text{ (mod } n)$$

$$\text{Ainsi } a+c \equiv (b+d) \text{ (mod } n)$$

On a ainsi démontré : Si $\left.\begin{array}{l} a \equiv b \text{ (mod. } n) \\ c \equiv d \text{ (mod. } n) \end{array}\right\}$ Alors $a+c \equiv b+d$ (mod. n)

1.5 pt **3** Application : Montrer que $4^4 \equiv 3$ (mod 11)
puis en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N};\ 4^{4n+2} - 3^{n+3} \text{ est divisible par 11.}$$

On a successivement :

- $4 \equiv 4$ (mod 11)
- $4^2 \equiv 16$ (mod 11) mais $16 = 1 \times 11 + 5$ donc $4^2 \equiv 5$ (mod 11)

- $4^4 \equiv 5^2$ (mod 11) soit $4^4 \equiv 25$ (mod 11) mais $25 = 2 \times 11 + 3$ donc $4^4 \equiv 3$ (mod 11)
- Comme $4^4 \equiv 3$ (mod 11) , on déduit par compatibilité de la puissance $4^{4n} \equiv 3^n$ (mod 11)
- En utilisant par $4^2 \equiv 5$ (mod 11) , on a par compatibilité de la multiplication :
$$\left.\begin{array}{l} 4^2 \equiv 5 \text{ (mod 11)} \\ 4^{4n} \equiv 3^n \text{ (mod 11)} \end{array}\right\} \quad \text{Alors } 4^{4n+2} \equiv 5 \times 3^n \text{ (mod. 11)}$$
- Comme $3^{n+3} = 3^n \times 3^3 = 27 \times 3^n$, et $3^3 \equiv 5$ (mod 11) car $27 = 2 \times 11 + 5$ on a :
$$\left.\begin{array}{l} 4^{4n+2} \equiv 5 \times 3^n \text{ (mod. 11)} \\ -3^{n+3} \equiv -5 \times 3^n \text{ (mod 11)} \end{array}\right\} \quad \text{Alors } 4^{4n+2} - 3^{n+3} \equiv 0 \text{ (mod. 11)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ 4^{4n+2} - 3^{n+3} \equiv 0 \text{ (mod. 11); ainsi } \forall n \in \mathbb{N};\ 4^{4n+2} - 3^{n+3} \text{ est divisible par 11.}}$$

? Exercice 2

1 pt **1** Soit x un entier relatif. Recopier et compléter le tableau suivant :

Modulo 4, x est congru à	0	1	2	3
Modulo 4, x^2 est congru à	0	1	0	1

2 pts **2** On considère l'équation (F) : $7x^2 - 4y^2 = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.

Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 3$ (mod 4).

Supposons que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F); alors $7x^2 - 4y^2 = 1$

Comme $7 \equiv 3$ (mod. 4) on déduit $7x^2 \equiv 3x^2$ (mod. 4) Par ailleurs $-4 \equiv 0$ (mod. 4) on déduit $-4y^2 \equiv 0$ (mod. 4)

$$\left.\begin{array}{l} 7x^2 \equiv 3x^2 \text{ (mod. 4)} \\ -4y^2 \equiv 0 \text{ (mod. 4)} \end{array}\right\} \quad \text{Alors } 7x^2 - 4y^2 \equiv 3x^2 \text{ (mod. 4)}$$

Comme $3 \equiv -1$ (mod. 4); on déduit $3x^2 \equiv -x^2$ (mod. 4), et donc $7x^2 - 4y^2 \equiv -x^2$ (mod. 4)

Ainsi si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $7x^2 - 4y^2 = 1$,

ce qui donne $-x^2 \equiv 1$ (mod. 4); soit $x^2 \equiv -1$ (mod. 4) et donc $x^2 \equiv 3$ (mod. 4)

En déduire que l'équation (F) n'a pas de solution.

Soit x un entier relatif quelconque; en posant la division euclidienne de x par 4 on a $x = 4q + r$ où $0 \leq r < 4$, soit $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. On déduit donc :

- si $r = 0$ alors $x = 4q$ donc $x \equiv 0$ (mod. 4)
- si $r = 1$ alors $x = 4q + 1$ donc $x \equiv 1$ (mod. 4)
- si $r = 2$ alors $x = 4q + 2$ donc $x \equiv 2$ (mod. 4)
- si $r = 3$ alors $x = 4q + 1$ donc $x \equiv 3$ (mod. 4)

Avec le tableau de congruences de la question 1, on a montré que l'équation $x^2 \equiv 3$ (mod. 4) n'a pas de solution.

$$\boxed{\text{Donc 'équation (F) n'a pas de solution.}}$$

1.5 pt **3** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x+3)^2 \equiv 1$ (mod 4).

$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$, or $6 \equiv 2$ (mod. 4) et $9 \equiv 1$ (mod. 4)

$$\begin{aligned} (x+3)^2 \equiv 1 \text{ (mod. 4)} &\iff x^2 + 6x + 9 \equiv 1 \text{(mod. 4)} \\ &\iff x^2 + 2x + 1 \equiv 1 \text{(mod. 4)} \\ &\iff x^2 + 2x \equiv 0 \text{(mod. 4)} \end{aligned}$$

On reprend alors le tableau de la question 1.

Modulo 4, x est congru à	0	1	2	3
Modulo 4, x^2 est congru à	0	1	0	1
Modulo 4, $2x$ est congru à	0	2	0	2
Modulo 4, $x^2 + 2x$ est congru à	0	3	0	3

On déduit $(x+3)^2 \equiv 1$ (mod. 4) $\iff$ $x \equiv 01$ (mod. 4) ou $x \equiv 2$ (mod. 4)

$$\boxed{\mathcal{S} = \{4k ; 4k+2 \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}}$$

? *Exercice 3*

On considère un polynôme P à coefficients entiers relatifs :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + + a_1 x + a_0.$$

2 pts **1** Montrer que toute racine entière de P non nulle divise a_0.
Soit d une racine entière de P.

$$\begin{aligned} P(d) = 0 \quad & \iff a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + + a_1 d + a_0 \\ & \iff a_n d^n + a_{n-1} d^{n-1} + + a_1 d = -a_0 \\ & \iff d\left(a_n d^{n-1} + a_{n-1} d^{n-2} + + a_1\right) = -a_0 \end{aligned}$$

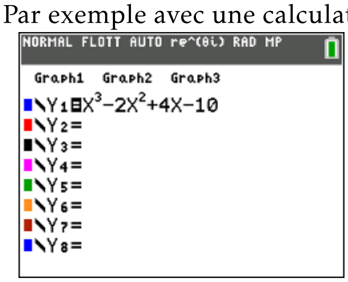
Comme les nombres d, $a_n, a_{n-1}, \cdots a_1$ sont des entiers, on déduit que $k = a_n d^{n-1} + a_{n-1} d^{n-2} + + a_1$ est un entier comme somme de produit d'entiers.
De l'égalité $d \times k = -a_0$ on déduit $d \div -a_0$, ou encore $d \div a_0$.

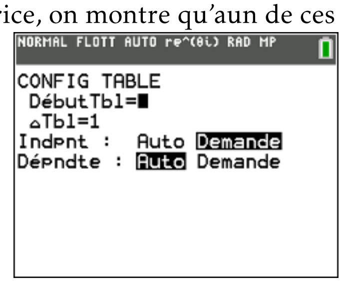
$$\boxed{\text{Conclusion : Une racine entière de } P \text{ , si elle existe, est un diviseur du terme constant } a_0.}$$

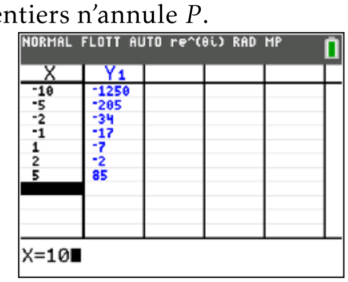
1 pt **2** En déduire que le polynôme $x^3 - 2x^2 + 4x - 10$ n'a pas de racine entière.
D'après la question 1) , si P a une racine entière d alors d divise son terme constant -10 .
L'ensemble des diviseurs de 10 est

$$\text{Div}(10) = \{1; 2; 5; 10; -1; -2; -5; -10\}$$

Par exemple avec une calculatrice, on montre qu'aun de ces entiers n'annule P.







$$\boxed{\text{Conclusion : } P \text{ n'a aucune racine entière.}}$$

? *Exercice 4*

Prouver par récurrence sur n que pour tout entier naturel n : $15^n - 2^{3n}$ est divisible par 7.
Montrons pour tout entier naturel n à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la propriété suivante :
$\mathcal{P}_n$: : " $15^n - 2^{3n}$ est divisible par 7"

- **Initialisation :**
On a $15^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ et comme $0 = 0 \times 7$ on en déduit que $15^0 - 2^0$ est divisible par 7.
La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
Supposons que la relation $\mathcal{P}_n$ soit vraie à un certain rang. Montrons qu'elle est alors vraie au rang suivant.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $15^n - 2^{3n}$ soit divisible par 7. Alors, il existe un entier naturel k tel que :
$15^n - 2^{3n} = 7k$, d'où on déduit $15^n = 7k + 2^{3n} \quad (HR)$.

Alors $\begin{aligned} 15^{n+1}-2^{3(n+1)} &= 15\times 15^n - 2^{3n+3} \\ &= 15\times\left(7k+2^{3n}\right)-2^{3n}\times 2^3 \qquad (HR) \\ &= 7\times 15k + 15\times 2^{3n} - 8\times 2^{3n} \\ &= 7\times 15k + 7\times 2^{3n} \\ &= 7\times\left(15k+2^{3n}\right)\end{aligned}$ Or $15k+2^{3n}$ est un entier comme somme d'entiers.

Ainsi $15^{n+1}-2^{3(n+1)}$ est divisible par 7.

La propriété a rang suivant est encore vraie.

- **Conclusion :**
  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ était initialisée au rang 0 et qu'elle vérifiait la propriété d'hérédité : le raisonnement par récurrence nous montre qu'elle est vraie pour tout entier naturel n.

Avec les congruences !
On a $15 \equiv 1 \pmod 7$
d'après la propriété sur les puissances on déduit $15^n \equiv 1^n \pmod 7$ soit $15^n \equiv 1 \pmod 7$
Par ailleurs$2^{3(n)} = (2^3)^n = 8^n$.
On a $8 \equiv 1 \pmod 7$
d'après la propriété sur les puissances on déduit $8^n \equiv 1^n \pmod 7$ soit $8^n \equiv 1 \pmod 7$

$\left.\begin{array}{l} 15^n \equiv 1 \pmod 7 \\ 2^{3(n)} \equiv 1 \pmod 7 \end{array}\right\}$ Par somme $15^n - 2^{3n} \equiv 0 \pmod 7$

Ce qui prouve que $15^n - 2^{3n}$ est divisible par 7.

? Exercice 5

3 pts **1** Soit n un entier naturel.

a. Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes de la division euclidienne de 3^n par 11.
On a :

$$\begin{aligned} 3^1 &\equiv 3 \pmod{11} \\ 3^2 &\equiv 9 \pmod{11} \\ 3^3 &\equiv 5 \pmod{11} \\ 3^4 &\equiv 4 \pmod{11} \\ 3^5 &\equiv 1 \pmod{11} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier naturel n, en posant la division de n par 5, on obtient $n = 5k + r$ où $0 \leq r < 5$ Ainsi :

$$\begin{aligned} 3^{5k} &\equiv 1 \pmod{11} \\ 3^{5k+1} &\equiv 3 \pmod{11} \\ 3^{5k+2} &\equiv 9 \pmod{11} \\ 3^{5k+3} &\equiv 5 \pmod{11} \\ 3^{5k+4} &\equiv 4 \pmod{11} \end{aligned}$$

b. En déduire que $2019^{2019} + 41$ est divisible par 11.
Déjà en posant la division euclidienne de 2019 par 11 ; on a $2016 = 11\times 183 + 3$;
ainsi $2016 \equiv 3 \pmod{11}$;
puis $2016^{2016} \equiv 3^{2016} \pmod{11}$;
En posant la division euclidienne de 2016 par 5, on a $2016 = 5\times 403 + 1$
comme 2016 est de la forme $5k+1$; on déduit $3^{2016} \equiv 3 \pmod{11}$
$2016^{2016} \equiv 3^{2016} \pmod{11}$ et $3^{2016} \equiv 3 \pmod{11}$ donc $2016^{2016} \equiv 3 \pmod{11}$
Enfin en ajoutant 41 ; $2016^{2016} + 41 \equiv 44 \pmod{11}$, or $44 = 11\times 11$, donc $2016^{2016} + 41 \equiv 0 \pmod{11}$,
ce qui prouve que $2016^{2016} + 41$ est divisible par 11.

1.5 pt **2** A quelle condition la somme de cinq entiers consécutifs est- elle divisible par 10 ?
La somme de 5 entiers consécutifs est $S = n-2+n-1+n+n+1+n+2 = 5n$
Ainsi S est divisible par 10 ssi il existe un entier k tel que $S = 10k$ soit $5n = 10k$ ce qui signifie $n = 2k$.

La somme de cinq entiers consécutifs est- elle divisible par 10 ssi le terme central est pair.

1.5 pt **3** Déterminer le reste de 555 444 333 222 111 dans la division euclidienne par 7.
On a $111 = 7 \times 15 + 6$ donc $111 \equiv 6[7]$ ou encore $111 \equiv -1[7]$.
Par ailleurs $N = 555444333222111 = 555 \times 10^{12} + 444 \times 10^9 + 333 \times 10^6 + 222 \times 10^3 + 111$.
$\left.\begin{array}{r} 10 \equiv 3[7] \\ 10^2 \equiv 3^2[7] \text{ soit } 10^2 \equiv 2[7] \end{array}\right\}$ Par produit $10^3 \equiv 6[7]$ soit $10^3 \equiv -1[7]$ En utilisant les propriétés de compatibilité des congruences avec la somme, le produit et les puissances, on obtient :

$$N \equiv 5 \times (-1)^{12} \times (-1) + 4 \times (-1)^9 \times (-1) + 3 \times (-1)^6 \times (-1) + 2 \times (-1)^3 \times (-1) - 1[7]$$

$$N \equiv -5 + 4 - 3 + 2 - 1[7]$$

$$N \equiv 4[7]$$

Le reste de 555 444 333 222 111 dans la division euclidienne par 7 est donc 4.