Nom : .... Prénom :	**DM 05**	TS Spé Maths — Fév. 2020 Devoir n° 8 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

Présentation : 2 points

? Exercice 1

Partie A

1 Ecrire l'algorithme d'Euclide pour les entiers 19 et 13.

a	b	r	
19	13	6	$19 = 1 \times 13 + 6 (1)$
13	6	1	$13 = 2 \times 6 + 1 (2)$
6	1	0	

Cet algorithme montre ici que $pgcd(19, 13) = 1$, c'est-à-dire que les nombres 13 et 19 sont premiers entre eux.

2 Déduire de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $13u + 19v = 1$.
On pose $a = 19$ et $b = 13$, alors :

$$\begin{aligned} (1) \quad &\iff a = b + 6 \\ &\iff 6 = a - b \\ (2) \quad &\iff b = 2(a-b) + 1 \\ &\iff b = 2a - 2b + 1 \\ &\iff 3b - 2a = 1 \end{aligned}$$

On vérifie que $3 \times 13 - 2 \times 19 = 1$ ou encore $-2 \times 19 + 3 \times 13 = 1$
Ainsi le couple $(3; -2)$ est un couples d'entiers relatifs de l'équation $13u + 19v = 1$.

3 En déduire un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $13u + 19v = 1\,000$.
En multipliant par 1 000 on obtient $-2\,000 \times 19 + 3\,000 \times 13 = 1\,000$
Ainsi le couple $(3\,000; -2\,000)$ est un couples d'entiers relatifs de l'équation $13u + 19v = 1\,000$.

4 Résoudre alors dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 13x + 19y = 1\,000$.

- ♡ Condition nécessaire : supposons que que $(x; y)$ soit un couple solution de (E) :
alors $13x + 19y = 1\,000$
Or $-2\,000 \times 19 + 3\,000 \times 13 = 1\,000$
Ainsi on a : $13x + 19y = -2\,000 \times 19 + 3\,000 \times 13$
donc $13(x - 3\,000) = 19(-y - 2\,000)$ (3)
On en déduit que $13 \mid 19(-y - 2\,000)$
Or les nombres 13 et 19 étant premiers entre eux, le théorème de Gauss donne $13 \mid (-y - 2\,000)$
Ainsi on peut affirmer qu'il existe un entier k tel que : $-y - 2\,000 = 13k$ d'où $y = -13k + 2\,000$
En reportant $-y - 2\,000 = 13k$ dans (3) on obtient : $13(x - 3\,000) = 19 \times 13k$
soit $x - 3\,000 = 19k$ ou encore $x = 19k + 3\,000$
Donc les couples candidats à être solutions de (E) , sont : $(19k + 3\,000; -13k - 2\,000)$ où k désigne un entier relatif quelconque.
- ♡ Réciproque :
Pour $x = 19k + 3\,000$ et $y = -13k - 2\,000$, on calcule :

$$\begin{aligned} 13x + 19y &= 13(19k + 3\,000) + 19(-13k - 2\,000) \\ &= 13 \times 19k + 13 \times 3\,000 - 19 \times 13k \\ &= 1\,000 \end{aligned}$$

Donc tous ces couples sont bien solutions de (E).

$$\mathcal{S} = \{(19k + 3\,000; -13k - 2\,000) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

5 Résoudre cette même équation dans l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers naturels (c'est-à-dire avec x et y positifs) .
Il suffit d'écrire que x et y sont des entiers positifs.

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\iff 19k + 3\,000 \geq 0 \\ &\iff 19k \geq -3\,000 \\ &\iff k \geq \frac{-3\,000}{19} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{3\,000}{19} \approx -157,8$ donc $x \geq 0 \Rightarrow k \geq -157$

$$\begin{aligned} y \geq 0 &\iff -13k - 2\,000 \geq 0 \\ &\iff -13k \geq -2\,000 \\ &\iff k \leq -\frac{2\,000}{13} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{2\,000}{13} \approx -153,8$ donc $y \geq 0 \Rightarrow k \leq -154$
En conclusion x et y sont deux entiers positifs, lorsque $-157 \leq k \leq -154$

$$\mathcal{S} = \{(19k + 3\,000; -13k - 2\,000) \text{ où } -157 \leq k \leq -154\}$$

Partie B

Voici maintenant le problème de Léonard Euler (1707-1783) :

U*n aubergiste fait payer le dîner 19 sous aux hommes et 13 sous aux femmes. Un soir avant de se coucher, après le dîner, il remarque qu'il a encaissé* 1 000 *sous.*

1 Quelles sont les possibilités quant au nombre d'hommes et de femmes parmi les convives. Justifier rapidement.
On note respectivement x et y le nombre de femmes et d'hommes ayant pris le dîner chez cet aubergiste.
L'aubergiste aura encaissé $19x + 13y$.
Sa recette est de 1 000 sous ; on a donc $19x + 13y = 1\,000$
Avec la partie A comme x et y sont des entiers positifs, on déduit que :

$$(x, y) \in S = \{(19k + 3\,000; -13k - 2\,000) \text{ où } -157 \leq k \leq -154\}$$

$$\begin{array}{lll} k = -157 & \text{donne} & (x,y) = (17, 41) \\ k = -156 & \text{donne} & (x,y) = (36, 28) \\ k = -155 & \text{donne} & (x,y) = (55, 15) \\ k = -154 & \text{donne} & (x,y) = (74, 2) \end{array}$$

2 Quels étaient les nombre d'hommes et de femmes parmi les convives, sachant que le valet a remarqué qu'il y avait plus d'hommes que de femmes ce soir là.
Le valet a remarqué qu'il y avait plus d'hommes que de femmes ce soir là, donc $x < y$. On ne retient donc que le couple (17,41).

Remarque

On peut apporter une solution au problème de Léonard Euler à l'aide du tableur.
On cherche les solutions entières de $19x + 13y = 1\ 000$
Attention ici, j'ai permuté x et y !
Dans un premier temps on localise les solutions entières de cette équation à l'intérieur d'un rectangle. Comme x et un entier positif, on déduit successivement :

$$\begin{aligned} x &\geq 0 & \\ 19x &\geq 0 & \text{en multipliant par } 19 > 0 \\ 19x + 13y &\geq 13y & \text{en multipliant par } 19 > 0 \\ 1\ 000 &\geq 13y & \\ y &\leq \frac{1\ 000}{13} & \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1\ 000}{13} \approx 76,9$ donc $y \leq 76$

Comme y et un entier positif, on déduit successivement :

$$\begin{aligned} y &\geq 0 & \\ 13y &\geq 0 & \text{en multipliant par } 13 > 0 \\ 19x + 13y &\geq 13y & \text{en ajoutant } 19x \\ 1\ 000 &\geq 19x & \\ x &\leq \frac{1\ 000}{19} & \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1\ 000}{19} \approx 52,6$ donc $y \leq 52$
On a donc prouvé qu'un couple (x, y) solution doit vérifier

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 52 \\ 0 \leq y \leq 76 \end{array} \right.$$

Ce qui fait $(52 + 1) \times (76 + 1) = 4081$ couples à tester.
On fait faire ce travail à Excel !
Dans la cellule B2 on a saisi la formule $:= 19 * \$A2 + 13 * B\$1$