

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**



Présentation : 2 points

? Exercice 1

On considère les suites et définies pour tout entier n naturel par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad v_0 = 1 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

On définit la suite de matrices (X_n) par la relation $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

- 1** a. Déterminer la matrice A telle que pour tout entier naturel n , on ait :
 $X_{n+1} = A \cdot X_n$
b. Démontrer par récurrence la relation suivante pour tout entier naturel n :
 $X_n = A^n \cdot X_0$.
- 2** a. Déterminer la matrice J telle que $A = 5I + J$ où I est la matrice identité d'ordre 2.
b. Calculer J^2 puis A^2 .
- 3** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $A^n = n5^{n-1}J + 5^nI$.
- 4** Exprimer u_n et v_n en fonction de n .

? Exercice 2

- 1** Démontrer que : « n n'est pas multiple de 5. » est équivalent à « $n^4 - 1$ est multiple de 5. »
- 2** Vérifier que :
 - a. 3 et 3^5 ont le même chiffre des unités.
 - b. 7^2 et 7^6 ont le même chiffre des unités.
 - c. 2^8 et 2^{12} ont le même chiffre des unités.
 - d. 4^3 et 4^7 ont le même chiffre des unités.
- 3** Soient a et b deux entiers naturels. Traduire en termes de congruence la propriété : « a et b ont le même chiffre des unités. »
- 4** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ Démontrer que n^{p+4} et n^p ont le même chiffre des unités.

? Exercice 3

Résolution dans \mathbb{N}

On cherche à résoudre dans \mathbb{N} , l'équation (E) d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^{40}$

- 1** Montrer que si a est solution de (E), alors a est impair.

2 On s'intéresse aux restes des divisions par 8 de a^2 , a étant impair.

Recopier et compléter le tableau de congruence suivant :

$a \equiv \dots [8]$	1	3	5	7
$a^2 \equiv \dots [8]$				

Que pouvez-vous dire du reste de $a^2 + 9$ dans la division par 8?

3 En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution.