Nom :	**DM 04**	TS Spé Maths — Janv. 2019
Prénom :		Devoir n° 8 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

Présentation : 2 points

Exercice 1

On considère les suites et définies pour tout entier n naturel par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad v_0 = 1 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 6u_n - v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 4v_n \end{cases}$$

On définit la suite de matrices (X_n) par la relation $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

1 **a.** Déterminer la matrice A telle que pour tout entier naturel n , on ait :
$X_{n+1} = A \cdot X_n$

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 6u_n - v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 4v_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

b. Démontrer par récurrence la relation suivante pour tout entier naturel n :
$X_n = A^n \cdot X_0$.

- Initialisation : comme $A^0 = I_2$; et $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$; ainsi la propriété est vraie au rang 0.

- Transmission de l'hérédité :
soit $k \geq 0$, on suppose que $X_k = A^k X_0$; on doit prouver que la propriété est vraie au rang $k+1$; c'est-à-dire : $X_{k+1} = A^{k+1} X_0$

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= AX_k \\ &= A \cdot A^k X_0 \text{ \textbf{d'après HR}} \\ &= A^{k+1} X_0 \end{aligned}$$

- Conclusion : On a donc vérifié que la propriété est vraie au rang 0 et qu'il y a transmission de l'hérédité ; le théorème de récurrence s'appliquant, on a pour tout $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$

2 **a.** Déterminer la matrice J telle que $A = 5I + J$ où I est la matrice identité d' ordre 2.

$$A = 5I + J \iff J = A - 5I = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b. Calculer J^2 puis A^2 .

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= (5I + J) \cdot (5I + J) \\ &= 5I \cdot 5I + 5I \cdot J + J \cdot 5I + J^2 \\ &= 25I + 5J + 5J \\ &= 25I + 10J \end{aligned}$$

$$\boxed{J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 35 & -10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}}$$

3 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a : $A^n = n5^{n-1}J + 5^n I$.

- Initialisation : comme $A^1 = A$; et
  $1 \times 5^{1-1}J + 5^1 I = J + 5I = A$; ainsi la propriété est vraie au rang 1.

- Transmission de l'hérédité :
  soit $k \geq 1$, on suppose que $A^k = k5^{k-1}J + 5^k I$; on doit prouver que la propriété est vraie au rang $k+1$; c'est-à-dire : $A^k = k5^{k-1}J + 5^k I$

$$\begin{aligned}
A^{k+1} &= A^k \times A \\
&= \left(k5^{k-1}J + 5^k I\right) \cdot (J + 5I) \ \textbf{d'après HR} \\
&= k5^{k-1}J^2 + k5^{k-1}J \cdot 5I + 5^k I \cdot J + 5^k I \cdot 5I \\
&= k5^{k-1} \times 5J + 5^k J + 5^k \times 5I \\
&= k5^k \times J + 5^k J + 5^{k+1} I \\
&= (k+1)5^k \times J + 5^{k+1} I
\end{aligned}$$

- Conclusion : On a donc vérifié que la propriété est vraie au rang 1 et qu'il y a transmission de l'hérédité ; le théorème de récurrence s'appliquant, on a pour tout $n \geq 1$, $A^n = n5^{n-1}J + 5^n I$

4 Exprimer u_n et v_n en fonction de n.
On a montré $X_n = A^n X_0$ et $A^n = n5^{n-1}J + 5^n I$.

$$\begin{aligned}
A^n &= n5^{n-1}J + 5^n I \\
&= n5^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & -n5^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5^n + n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & 5^n - n5^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= A^n X_0 \\
&= \begin{pmatrix} 5^n + n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & 5^n - n5^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -n5^{n-1} \\ 5^n - n5^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_n = -n5^{n-1} \text{ et } v_n = 5^n - n5^{n-1}.}$$

? Exercice 2

1 Démontrer que : « n n'est pas multiple de 5 . »est équivalent à « $n^4 - 1$ est multiple de 5. »

- Supposons que n n'est pas un multiple de 5 :
  On pose la division euclidienne de n par 5 , alors $n = 5k + r$ où $0 \leq r < 5$.
  Si « n n'est pas multiple de 5 . »alors $n = 5k + r$ où $1 \leq r < 5$:
  de l'ègalité $n = 5k + r$, on déduit $n \equiv r[5]$;

$n \equiv \cdots [5]$	0	1	2	3	4
$n^4 \equiv \cdots [5]$	0	1	1	1	1
$n^4 - 1 \equiv \cdots [5]$	4	0	0	0	0

  D'après ce tableau de congruence, si n n'est pas un multiple de 5, alors $n^4 - 1 \equiv 0[5]$, ce qui prouve que « $n^4 - 1$ est multiple de 5. »

- Deuxième étape :
  On suppose que $n^4 - 1$ est un multiple de 5.
  Prouvons que « n n'est pas multiple de 5 . »

  on fait un raisonnement par l'absurde : Supposons que n est un multilpe de 5 alors $n \equiv 0[5]$ d'où on déduit $n^4 \equiv 0^4[5]$ donc $n^4 - 1 \equiv -1[5]$; ceci contredit 'hypothèse « $n^4 - 1$ est multiple de 5. »; et donc fournit la conclusion.

2 Vérifier que :

a. 3 et 3^5 ont le même chiffre des unités.
Pour cela, on montre que 3 et 3^5 sont congrus modulo 10. $3^2 = 9$ et $9 \equiv -1[10]$ donc $3^2 \equiv -1[10]$, puis $3^4 \equiv (-1)^2[10]$ d'où $3^4 \equiv 1[10]$, puis en multipliant par 3 : $3^5 \equiv 3[10]$.

$$\boxed{\text{Comme } 3^5 \equiv 3[10], 3 \text{ et } 3^5 \text{ ont le même chiffre des unités.}}$$

b. 7^2 et 7^6 ont le même chiffre des unités. $7^2 = 49$ et $49 \equiv -1[10]$ donc $7^2 \equiv -1[10]$, puis $7^6 \equiv (-1)^3[10]$ d'où $7^6 \equiv -1[10]$, et on a montré $7^2 \equiv -1[10]$.

$$\boxed{\text{Comme } 7^6 \equiv 7^2[10], 7^6 \text{ et } 7^2 \text{ ont le même chiffre des unités.}}$$

c. 2^8 et 2^{12} ont le même chiffre des unités.
$2^8 = 256$ et $2^{12} = 4096$

$$\boxed{2^8 \text{ et } 2^{12} \text{ ont le même chiffre des unités qui est 6.}}$$

d. 4^3 et 4^7 ont le même chiffre des unités.
$4^3 = 64$ et $4^7 = 16384$

$$\boxed{4^3 \text{ et } 4^7 \text{ ont le même chiffre des unités qui est 4.}}$$

3 Soient a et b deux entiers naturels. Traduire en termes de congruence la propriété : « a et b ont le même chiffre des unités. »

$$\boxed{\text{« } a \text{ et } b \text{ ont le même chiffre des unités. »ssi } a \equiv b[10]}$$

4 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^\star$ Démontrer que n^{p+4} et n^p ont le même chiffre des unités.
Tout d'abord remarquons que d'après le 3 on doit établir que $n^{p+4} \equiv n^p[10]$.

$$\begin{aligned} n^{p+4} \equiv n^p[10] \quad & \Longleftrightarrow n^{p+4} - n^p \equiv 0[10] \\ & \Longleftrightarrow n^p\left(n^4 - 1\right) \equiv 0[10] \end{aligned}$$

On procède alors par disjonction de cas :

- Premier cas n n'est pas un multiple de 5 : d'après la question 1° $n^4 - 1$ est multiple de 5.
  On fait une discussion suivant la parité de n

- ☐ n est pair :
  dans ce cas n est multiple de 2 , donc $n \equiv 0[2]$ puis $n^p \equiv 0[2]$, il existe donc un entier s tel que $n^p = 2s$.
  Par ailleurs $\left(n^4 - 1\right) \equiv 0[5]$, il existe donc un entier r tel que $n^4 - 1 = 5r$.
  $n^p\left(n^4 - 1\right) = 2s \times 5r = 10rs$

  On a donc $n^p\left(n^4 - 1\right) \equiv 0[10]$
- ☐ n est impair :
  Comme n est impair , on déduit $n \equiv 1[2]$, puis $n^4 \equiv 1[2]$, et donc $n^4 - 1 \equiv 0[2]$, il existe donc un entier s tel que $n^4 - 1 = 2s$.
  Par ailleurs $n^4 - 1$ est multiple de 5, $n^4 - 1$ est divisible par 2 et par 5 donc de 10.
  On a donc $\left(n^4 - 1\right) \equiv 0[10]$ puis On a donc $n^p\left(n^4 - 1\right) \equiv 0[10]$

- Deuxième cas n est un multiple de 5 : On fait une discussion suivant la parité de n
  - ☐ n est pair :
    dans ce cas n est multiple de 2 et de 5, donc de 10, car 2 et 10 sont premiers entre eux.
    il en est de même pour n^p donc pour $n^p\left(n^4 - 1\right)$.
    On a donc $n^p\left(n^4 - 1\right) \equiv 0[10]$
  - ☐ n est impair :
    Comme n est impair , on déduit $n \equiv 1[2]$, puis $n^4 \equiv 1[2]$, et donc $n^4 - 1 \equiv 0[2]$, il existe donc un entier s tel que $n^4 - 1 = 2s$.
    Par ailleurs $n^4 - 1$ est multiple de 5, $n^4 - 1$ est divisible par 2 et par 5 donc de 10.
    On a donc $\left(n^4 - 1\right) \equiv 0[10]$ puis On a donc $n^p\left(n^4 - 1\right) \equiv 0[10]$

? Exercice 3

Résolution dans $\mathbb{N}$
On cherche à résoudre dans $\mathbb{N}$, l?équation (E) d?inconnue a : $a^2 + 9 = 2^{40}$

1. Montrer que si a est solution de (E), alors a est impair.
2. On s'intéresse aux restes des divisions par 8 de a^2 , a étant impair.
   Recopier et compléter le tableau de congruence suivant :

$a \equiv \cdots [8]$	1	3	5	7
$a^2 \equiv \cdots [8]$				

   Que pouvez-vous dire du reste de $a^2 + 9$ dans la division par 8 ?
3. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution.