Nom : .... *Prénom :*	**Corrigé du DM 03**	TS Spé Maths — *Nov. 2018* *Devoir n° 4* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***

Attention ! Le sujet est sur 2 pages (recto-verso). *Présentation : 2 points*

Exercice 1 : Un problème d'évolution...

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols.
Au 1er juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.
On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1er juillet de l'année $2012+n$.

Partie A - Un modèle simple

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& 1,1u_n - 2\,000v_n \\ v_{n+1} &=& 2\times10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

1 **a.** On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0.
La matrice qui va retranscrire les deux relations de récurrence des suites (u_n) et (v_n) est :

$A = \begin{pmatrix} 1,1 & -2000 \\ 2\times10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix}$

La matrice U_0 est donc $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 120 \end{pmatrix}$.

$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& 1,1u_n - 2\,000v_n \\ v_{n+1} &=& 2\times10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{array}\right.$ donc

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -2000 \\ 2\times10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ soit } U_{n+1} = A \times U_n$$

b. Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1er juillet 2018.
Le premier juillet de l'année 2018, c'est-à-dire $2012+6$, l'estimation est donc contenue dans le vecteur U_6.
$U_6 = A \times U_5 = A^2 \times U_4 = ... = A^6 \times U_0$. À la calculatrice, on obtient (en arrondissant les valeurs) $U_6 \approx \begin{pmatrix} 1\,882\,353{,}2 \\ 96,47 \end{pmatrix}$, cela donne donc, une estimation de 96 renards et 1 882 353 campagnols (on se doit d'arrondir à l'entier près, puisque le nombre de campagnols comme celui de renards doit être un entier naturel).

2 Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5\,000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$.

On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

a. Calculer la matrice inverse de P.
On peut déjà calculer le déterminant de P :

$$det(P) = 20\,000 - 5\,000 = 15\,000$$

et donc $det(P) \neq 0$ Ce qui prouve que P est inversible. On résout le système $Y = PX$:

$$\begin{cases} 20\,000x + 5\,000y = u & (\times 1) \\ x + y = v & (\times(-5\,000)) \end{cases} \iff \begin{cases} 20\,000x + 5\,000y = u \\ -5\,000x - 5\,000y = -5\,000v \end{cases} \iff \begin{cases} 15\,000x = u - 5\,000v & (L_1 - 5\,000L_2) \\ y = v - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{15\,000}u - \dfrac{5\,000}{15\,000}v \\ y = v - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{15\,000}u - \dfrac{1}{3}v \\ y = v - \dfrac{1}{15\,000}u + \dfrac{1}{3}v \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{15\,000}u - \dfrac{1}{3}v \\ y = -\dfrac{1}{15\,000}u + \dfrac{4}{3}v \end{cases}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{15\,000} & -\frac{1}{3} \\ -\dfrac{1}{15\,000} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Résultat que l'on peut vérifier sur la calculatrice.

b. Montrer $D = P^{-1} \times A \times P$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

Pour tout entier naturel n, soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a, $D^0 = I_2$, où I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \text{Donc } P \times I_2 \times P^{-1} \times U_0 &= P \times P^{-1} \times U_0 && \text{car la matrice } I_2 \text{ est neutre pour le produit.} \\ &= I_2 \times U_0 && \text{car les matrices } P \text{ et } P^{-1} \text{ sont inverses l'une de l'autre.} \\ &= U_0 && \text{à nouveau parce que } I_2 \text{ est l'élément neutre.} \end{aligned}$$

On a donc bien $U_0 = P \times D^0 \times P^{-1} \times U_0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Pour un entier naturel k donné, on suppose la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= A \times U_k && \text{d'après la question } \mathbf{1.\ a.} \\ &= P \times D \times P^{-1} \times U_k && \text{d'après la relation admise au début de la question } \mathbf{2.} \\ &= P \times D \times P^{-1} \times P \times D^k \times P^{-1} \times U_0 && \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= P \times D \times I_2 \times D^k \times P^{-1} \times U_0 && \text{puisque } P \text{ et } P^{-1} \text{ sont inverses l'une de l'autre} \\ &= P \times D \times D^k \times P^{-1} \times U_0 \\ &= P \times D^{k+1} \times P^{-1} \times U_0 && \text{et ça, c'est la propriété } \mathcal{P}_{k+1} \end{aligned}$$

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie, et si une propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie, la suivante l'est également, donc en application de l'axiome de récurrence, on peut confirmer que, pour tout entier naturel n, on a bien $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$. (ce que l'on avait utilisé dans le cas particulier $n = 6$ à la question **1. b.**)

d. Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n.

Comme la matrice D est diagonale, alors on a $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}$.

e. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_n &= \dfrac{2,8 \times 10^7 + 2 \times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\ v_n &= \dfrac{1\,400 + 400 \times 0,7^n}{15} \end{cases}$$

Décrire l'évolution des deux populations.

L'évolution des populations peut faire référence à deux choses : la monotonie des suites, et leurs limites éventuelles.

Ici, les deux suites sont la somme d'une constante et d'une suite géométrique de premier terme positif
$\dfrac{2 \times 10^6}{15}$ pour (u_n)
et $\dfrac{400}{15}$ pour (v_n)
et de raison 0,7 (donc strictement comprise entre 0 et 1).

Ces suites géométriques seront donc strictement décroissantes et convergentes vers 0, donc en ajoutant une constante :

- La monotonie n'est pas affectée, on peut donc dire que les suites (u_n) et (v_n) sont décroissantes strictement.
- La limite est modifiée de cette constante, ce qui veut dire que (u_n) converge vers $\dfrac{2,8\times 10^7}{15}$ soit environ 1 866 667 campagnols et (v_n) converge vers $\dfrac{1\,400}{15}=\dfrac{280}{3}$, soit environ 93 renards.

Partie B - Un modèle plus conforme à la réalité

Dans la réalité, on observe que si le nombre de renards a suffisamment baissé, alors le nombre de campagnols augmente à nouveau, ce qui n'est pas le cas avec le modèle précédent.
On construit donc un autre modèle, plus précis, qui tient compte de ce type d'observations à l'aide des relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcr} u_{n+1} & = & 1,1u_n - 0,001u_n\times v_n \\ v_{n+1} & = & 2\times 10^{-7}u_n\times v_n + 0,6v_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n\geqslant 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

Le tableau ci-dessous présente ce nouveau modèle sur les 25 premières années en donnant les effectifs des populations arrondis à l'unité :

	A	B	C
1	Modèle de la **partie B**		
2	n	u_n	v_n
3	0	2 000 000	120
4	1	1 960 000	120
5	2	1 920 800	119
6	3	1 884 228	117
7	4	1 851 905	114
8	5	1 825 160	111
9	6	1 804 988	107
10	7	1 792 049	103
11	8	1 786 692	99
12	9	1 789 005	94
13	10	1 798 854	91
14	11	1 815 930	87
15	12	1 839 780	84
16	13	1 869 827	81
17	14	1 905 378	79
18	15	1 945 622	77
19	16	1 989 620	77
20	17	2 036 288	76
21	18	2 084 374	77
22	19	2 132 440	78
23	20	2 178 846	80
24	21	2 221 746	83
25	22	2 259 109	87
26	23	2 288 766	91
27	24	2 308 508	97

1 Quelles formules faut-il écrire dans les cellules B4 et C4 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes B et C ?
Dans la cellule B4, la relation de récurrence de la suite (u_n) donne : =1,1*B3 - 0,001*B3*C3 .
Dans la cellule C4, on écrit : = 2*10^(-7)*B3*C3 + 0,6*C3.

2 Avec le deuxième modèle, à partir de quelle année observe-t-on le phénomène décrit (baisse des renards et hausse des campagnols) ?
On constate la baisse des prédateurs et la hausse des proies en 2021 (pour $n = 9$, et $2012 + 9 = 2021$).

Partie C

Dans cette partie on utilise le modèle de la partie B.
Est - il possible de donner à u_0 et v_0 des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel n on ait $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$? (On parle alors d'état stable.)

$$\begin{aligned} u_{n+1} = u_n &\iff 0,1u_n - 0,001u_n \times v_n = 0 \\ &\iff u_n(0,1 - 0,001v_n) = 0 \\ &\iff u_n = 0 \text{ ou } v_n = 100. \end{aligned}$$

De la même façon : $v_{n+1} = v_n \iff v_n = 0$ ou $u_n = 2 \times 10^6$.
Si l'on suppose que les populations sont présentes, alors $u_n = u_0 = 2 \times 10^6$ et $v_n = v_0 = 100$ pour tout n est le seul exemple de suites constantes selon ce modèle. Cela correspond à 2 millions de campagnols et 100 renards.

Si on ne suppose pas que les deux populations sont présentes, on peut prendre une suite constante égale à 0 pour u ou pour v, mais cela rend caduc le modèle (s'il y a 0 campagnols, que mangent les renards ? ou s'il n'y a pas de renards pour manger les campagnols, qui limitera la croissance de la population de campagnols ?).