Nom :	**DM**	TS Spé Maths	Janv. 2017
Prénom :		Devoir n° 04	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
L'utilisation de logiciels est autorisée.

Exercice 1

a et b sont des entiers naturels tels que $a \equiv 5(7)$ et $b \equiv 3(7)$. Déterminez les restes de la division euclidienne par 7 de :

1 $2a+5b$

$\left.\begin{array}{l} a \equiv 5(7) \\ b \equiv 3(7) \end{array}\right\}$ par compatibilité avec le produit on obtient : $\left.\begin{array}{l} 2a \equiv 10(7) \\ 5b \equiv 15(7) \end{array}\right\}$ par compatibilité $2a+5b \equiv 25(7)$

Or $25 = 7\times 3+4$, donc $25 \equiv 4(7)$; puis par transitivité $2a+5b \equiv 4(7)$

> Si $a \equiv 5(7)$ et $b \equiv 3(7)$ alors le reste de la division euclidienne de $2a+5b$ par 7 vaut 4.

2 a^2+11b

$\left.\begin{array}{l} a \equiv 5(7) \\ b \equiv 3(7) \end{array}\right\}$ par compatibilité avec les puissances on obtient : $\left.\begin{array}{l} a^2 \equiv 25(7) \\ 11b \equiv 33(7) \end{array}\right\}$ par compatibilité $a^2+11b \equiv 58(7)$

Or $58 = 7\times 8+2$, donc $58 \equiv 2(7)$; puis par transitivité $a^2+11b \equiv 2(7)$

> Si $a \equiv 5(7)$ et $b \equiv 3(7)$ alors le reste de la division euclidienne de a^2+11b par 7 vaut 2.

3 a^2+3b^2

$\left.\begin{array}{l} a \equiv 5(7) \\ b \equiv 3(7) \end{array}\right\}$ par compatibilité avec les puissances on obtient : $\left.\begin{array}{l} a^2 \equiv 25(7) \\ 3b^2 \equiv 27(7) \end{array}\right\}$ par compatibilité $a^2+3b^2 \equiv 52(7)$

Or $52 = 7\times 7+3$, donc $52 \equiv 3(7)$; puis par transitivité $a^2+3b^2 \equiv 3(7)$

> Si $a \equiv 5(7)$ et $b \equiv 3(7)$ alors le reste de la division euclidienne de a^2+3b^2 par 7 vaut 3.

Exercice 2

1 Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{943} par 7 ?

On a $6 \equiv -1(7)$, donc par compatibilité avec les puissances on a $6^{943} \equiv (-1)^{943}(7)$,soit $6^{943} \equiv -1(7)$.
Or $-1 \equiv 6(7)$ et donc $6^{943} \equiv 6(7)$.

> Le reste de la division euclidienne de 6^{943} par 7 vaut 6.

2 Quel est le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7 ?

$247 = 7\times 35+2$, donc $247 \equiv 2(7)$, par compatibilité avec les puissances on déduit $247^{349} \equiv 2^{349}(7)$.
On observe la suite des restes de la division euclidienne de 2^n par 7 :

- $2^1 \equiv 2(7)$
- $2^2 \equiv 4(7)$
- $2^3 \equiv 1(7)$

On pose alors la division euclidienne de n par 3 :on a alors $n = 3k+r$, où $0 \le r < 3$, donc $r \in \{0;1;2\}$:

- si $r = 0$, $n = 3k$; de $2^3 \equiv 1(7)$ on déduit $2^{3k} \equiv 1(7)$.
- si $r = 1$, $n = 3k+1$; de $2^1 \equiv 2(7)$ on déduit $2^{3k+1} \equiv 2(7)$.

- si $r = 2$, $n = 3k + 2$; de $2^2 \equiv 4(7)$ on déduit $2^{3k+2} \equiv 4(7)$.

En posant la division euclidienne de 349 par 3 on obtient : $349 = 3 \times 116 + 1$; ainsi de l'égalité pour tout k entier naturel $2^{3k+1} \equiv 2(7)$, on déduit $2^{3\times 116+1} \equiv 2(7)$, et donc $2^{349}(7)$, puis comme $247^{349} \equiv 2^{349}(7)$, on a $247^{349} \equiv 2(7)$.

Le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7 vaut 2.

Exercice 3

1 Complétons le tableau des restes dans la congruence modulo 5.

$n \equiv \cdots(5)$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv \cdots(5)$	0	1	4	4	1

2 Déduisez-en que l'équation $x^2 - 5y^2 = 3$, avec x et y entiers naturels, n'a pas de solution.

Supposons que (x, y) soit un couple d'entiers solution de l'équation $x^2 - 5y^2 = 3$, alors comme $-5y^2 \equiv 0(5)$, on déduit que $x^2 \equiv 3(5)$, mais avec le tableau de congruences ci-dessus, on voit que quel que soit l'entier x ; on a $x^2 \equiv 0(5)$ ou $x^2 \equiv 1(5)$ ou $x^2 \equiv 4(5)$, ce qui débouche sur une contradiction.

Donc l'équation $x^2 - 5y^2 = 3$, avec x et y entiers naturels, n'a pas de solution.

Exercice 4

A la pointe ouest de l'Île de Ré, se situe le grand phare des baleines. L'escalier qui mène au sommet a un nombre de marches compris entre 240 et 260.

Teddy et Laure sont deux sportifs de haut niveau. Laure monte l'escalier trois marches par trois marches ; à la fin, il lui reste deux marches. Teddy, lui, monte l'escalier quatre marches par quatre marches ; à la fin, il lui reste une marche.

Combien de marches l'escalier comporte-t-il ?

On note N le nombre de marches de l'escalier :

- Laure monte l'escalier trois marches par trois marches ; à la fin, il lui reste deux marches , donc $N \equiv 2(3)$.Il existe donc un entier ℓ tel que $N = 3\ell + 2$.
- Teddy, lui, monte l'escalier quatre marches par quatre marches ; à la fin, il lui reste une marche, $N \equiv 1(4)$. Il existe donc un entier k tel que $N = 4k + 1$.
- Enfin le nombre de marches N est compris entre 240 et 260, donc $240 \leq N \leq 260$.

$$\begin{aligned}
240 \leq N \leq 260 &\iff 240 \leq 4k+1 \leq 260 \\
&\iff 239 \leq 4k \leq 259 \\
&\iff \tfrac{239}{4} \leq k \leq \tfrac{259}{4} \\
&\iff 59{,}75 \leq k \leq 64{,}75 \\
&\iff k \in \{60; 61; 62; 63; 64\} \\
&\iff 4k+1 \in \{241; 245; 249; 253; 257\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
240 \leq N \leq 260 \quad & \Longleftrightarrow 240 \leq 3\ell + 2 \leq 260 \\
& \Longleftrightarrow 238 \leq 3\ell \leq 258 \\
& \Longleftrightarrow \tfrac{238}{3} \leq \ell \leq \tfrac{258}{3} \\
& \Longleftrightarrow \ell \in \{80; 81; 82; 83; 84; 85; 86\} \\
& \Longleftrightarrow 3\ell + 2 \in \{242; 245; 248; 251; 254; 257; 260\}
\end{aligned}$$

$$\{242; 245; 248; 251; 254; 257; 260\} \cap \{241; 245; 249; 253; 257\} = \{245; 257\}$$

$$\boxed{\text{Au vu des données l'escalier peut avoir 245 ou 257 marches ...}}$$

Le phare a été construit, à partir de 1849 sur des plans de l'architecte Léonce Reynaud, pour remplacer l'ancien phare de 29 mètres construit en 1682 sur les directives de Vauban et qui subsiste encore aujourd'hui au nord du phare. La mise en service eut lieu en 1854. Le phare est haut de 57 mètres et l'accès au sommet se fait par un escalier hélicoïdal de 257 marches.