Correction du Devoir Surveillé : n° III

Exercice 1

(6 points)

Les 3 questions sont indépendantes et peuvent donc être traitées séparément

1 **a.** Division euclidienne de 2015 par 13
$2015 = 13 \times 155 + 0$

b. Division euclidienne de -2015 par 13
$-2015 = 13 \times (-155) + 0$

2 Ensemble des nombres entiers N qui, dans leur division euclidienne par 5 donnent un quotient égal au double du reste.
On cherche les valeurs de N telles que : $N = 5 \times 2r + r = 11r$ avec $0 \leq r \leq 5$.
Les valeurs possibles sont donc : 0 11 22 33 et 44
Vérifions :
$0 = 5 \times 0 + 0$
$11 = 5 \times 2 + 1$
$22 = 5 \times 4 + 2$
$33 = 5 \times 6 + 3$
$44 = 5 \times 8 + 4$

3 Lorsque l'on divise un entier a par 15 le reste est 11.
Reste de la division euclidienne de a par 5
On a : $a = 15 \times q + 11$
Donc : $a = 5 \times 3q + 11$
Mais $11 > 5$ 11 ne peut être un reste dans une division euclidienne par 5
On a par contre : $a = 5 \times 3q + 10 + 1 = 5 \times (3q + 2) + 1$
Le reste de la division euclidienne de a par 5 est donc $\boxed{1}$

Exercice 2

(5 points)

Prouver par récurrence sur n que pour tout entier naturel n : $15^n - 2^{3n}$ est divisible par 7.
Montrons pour tout entier naturel n à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la propriété suivante :
$\mathcal{P}_n$: : " $15^n - 2^{3n}$ est divisible par 7"

- **Initialisation :**
On a $15^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$ et comme $0 = 0 \times 7$ on en déduit que $15^0 - 2^0$ est divisible par 7.
La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
Supposons que la relation $\mathcal{P}_n$ soit vraie à un certain rang. Montrons qu'elle est alors vraie au rang suivant.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $15^n - 2^{3n}$ soit divisible par 7. Alors, il existe un entier naturel k tel que :
$15^n - 2^{3n} = 7k$, d'où on déduit $15^n = 7k + 2^{3n}$ (HR).

Alors $\begin{aligned} 15^{n+1}-2^{3(n+1)} &= 15\times 15^n - 2^{3n+3} \\ &= 15\times\left(7k+2^{3n}\right) - 2^{3n}\times 2^3 \qquad (HR) \\ &= 7\times 15k + 15\times 2^{3n} - 8\times 2^{3n} \\ &= 7\times 15k + 7\times 2^{3n} \\ &= 7\times\left(15k+2^{3n}\right) \end{aligned}$ Or $15k+2^{3n}$ est un entier comme somme d'entiers. Ainsi $15^{n+1}-2^{3(n+1)}$ est divisible par 7.

La propriété a rang suivant est encore vraie.

- **Conclusion :**
  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ était initialisée au rang 0 et qu'elle vérifiait la propriété d'hérédité : le raisonnement par récurrence nous montre qu'elle est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 3

(6 points)

1 On appelle diviseur strict d'un nombre entier naturel, tout diviseur entier naturel, autre que le nombre lui-même. Déterminer les diviseurs stricts de 220.
On obtient $220 = 2^2\times5\times11$, on déduit les diviseurs stricts de 220 : $D_{220} = \{1;2;4;5;10;11;20;22;44;55;110\}$

2 On appelle amiables deux entiers naturels tels que chacun d'eux soit égal à la somme des diviseurs stricts de l'autre.
Vérifier que 220 et 284 sont amiables.
On obtient $284 = 2^2\times71$, on déduit les diviseurs stricts de 284 : $D_{284} = \{1;2;4;71;142\}$ La somme des diviseurs strict de 284 est $1+2+4+71+142 = 220$.

La somme des diviseurs strict de 2220 est $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$.
Ainsi 220 et 284 sont amiables.

3 On appelle parfait un nombre égal à la somme de ses diviseurs stricts (amiable avec lui-même) 28 est-il parfait ?
On a $28 = 2^2\times7$, on déduit les diviseurs stricts de 28 : $D_{28} = \{1;2;4;7;14\}$ La somme des diviseurs strict de 284 est $1+2+4+7+14 = 28$.
28 est un nombre parfait.

Exercice 4

(5 points)

Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.
Ecrire $n = p^2+q^2$ et étudier le reste de la division euclidienne de n par 4 en distinguant les différents cas de parité de p et q.

- Premier cas : p pair, q pair alors $p = 2k$ et $q = 2l$ où k et l désignent des entiers.
  On déduit $n = p^2+q^2 = 4k^2+4l^2 = 4(k^2+l^2)$
  Le reste de la division euclidienne de n par 4 est 0.
- Deuxième cas : p pair, q impair alors $p = 2k$ et $q = 2l+1$ où k et l désignent des entiers.
  On déduit $n = p^2+q^2 = 4k^2+4l^2+4l+1 = 4(k^2+l^2+l)+1$
  Le reste de la division euclidienne de n par 4 est 1.
- Troisième cas : p impair, q pair alors $p = 2k+1$ et $q = 2l$ où k et l désignent des entiers.
  On déduit $n = p^2+q^2 = 4k^2+4k+1+4l^2 = 4(k^2+k+l^2)+1$
  Le reste de la division euclidienne de n par 4 est 1.

- Quatrième cas : p impair, q impair alors $p = 2k + 1$ et $q = 2l + 1$ où k et l désignent des entiers.
  On déduit $n = p^2 + q^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2$
  Le reste de la division euclidienne de n par 4 est 2.

Conclusion : le reste de la division euclidienne de n par 4 est $0, 1$ ou 2 et donc n'est jamais égal à 3

Pour finir : Un peu de culture ?

- Les nombres amiables ont une longue histoire en magie et astrologie, aphrodisiaques et talismans ...
- Pour se prouver notre amour : tu manges 220 bonbons et moi 284 !
- Il existe des légendes tournant autour de ce thème : Une vielle coutume de numérologiste arabe consistait à inscrire 220 sur un fruit et 284 sur l'autre.
- Je mange l'un et je donne l'autre à manger à l'être aimé.
- Ce nombre se trouve dans la Bible :Nombre de chèvres offertes par Jacob à Esaü, cadeau amiable ? (20 mâles et 200 femelles)
- Pythagore connaissait ce couple de nombres. Il aurait dit :
  "Un ami est celui qui est l'autre comme sont 220 et 284"
- Au Moyen - Âge,ces deux nombres étaient signe d'amour et jouaient un grand rôle dans les horoscopes.
- Fermat :Un nouveau couple de nombres amiables n'a été trouvé qu'en 1636 par Pierre de Fermat :
  17 296 et 18 416 dit couple de Fermat.Il avait été découvert par Al-Farisi (1260-1320)
- Descartes :Descartes découvre une nouvelle paire en 1638.
  9 363 584 et 9 437 056 dit couple de Descartes
  Il avait été découvert par Al-Yazdi vers 1500 .
- Euler :Il donne une liste de 64 paires amiables (avec 2 erreurs)
- Nicolo Paganini
  Mais curieusement, le vrai numéro 2 a attendu 1867 pour être déniché par un jeune Italien de 16 ans.
  1184 et 1210
- Aujourd'hui
  Toutes les paires jusqu'à 10 chiffres sont connues
  et quelques autres à plus de chiffres (au total plus de 7500)