Nom :	**DS 06**	2nde 06 — Janv. 2024
Prénom :		Devoir n° 08 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 5,5 points

[Cours]
Dans le plan muni d'un repère, on donne les points $A(1;3);B(-1;4)$ et $C(3;-2)$.

1 pt **1** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\4-3\end{pmatrix}$ ainsi $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}}$

1 pt **2** Calculer AB

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}.$ $\boxed{AB=\sqrt{5}}$

3 Calculer les cordonnées du milieu de $[AC]$

Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $I\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_C}{2}\\\frac{y_A+y_C}{2}\end{pmatrix}$ soit $\boxed{I\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$

1.5 pt **4** Soit $D(2021\ ;\ -1007)$. Montrer que les points A, B et D sont alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2021-1\\-1007-3\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2020\\-1010\end{pmatrix}$

On calcule $\text{dét}(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-2 & 2022\\1 & -1010\end{vmatrix}=-2\times(-1010)-1\times2020=-2020-2020=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et D sont alignés.

2 pts **5** Déterminer les coordonnées de P tel que $\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{BP}$.

P vérifie $\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{BP}$; en posant $P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$; on a $\overrightarrow{PA}\begin{pmatrix}1-x\\3-y\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BP}\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}$ donc $3\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix}3x+3\\3y-12\end{pmatrix}$.

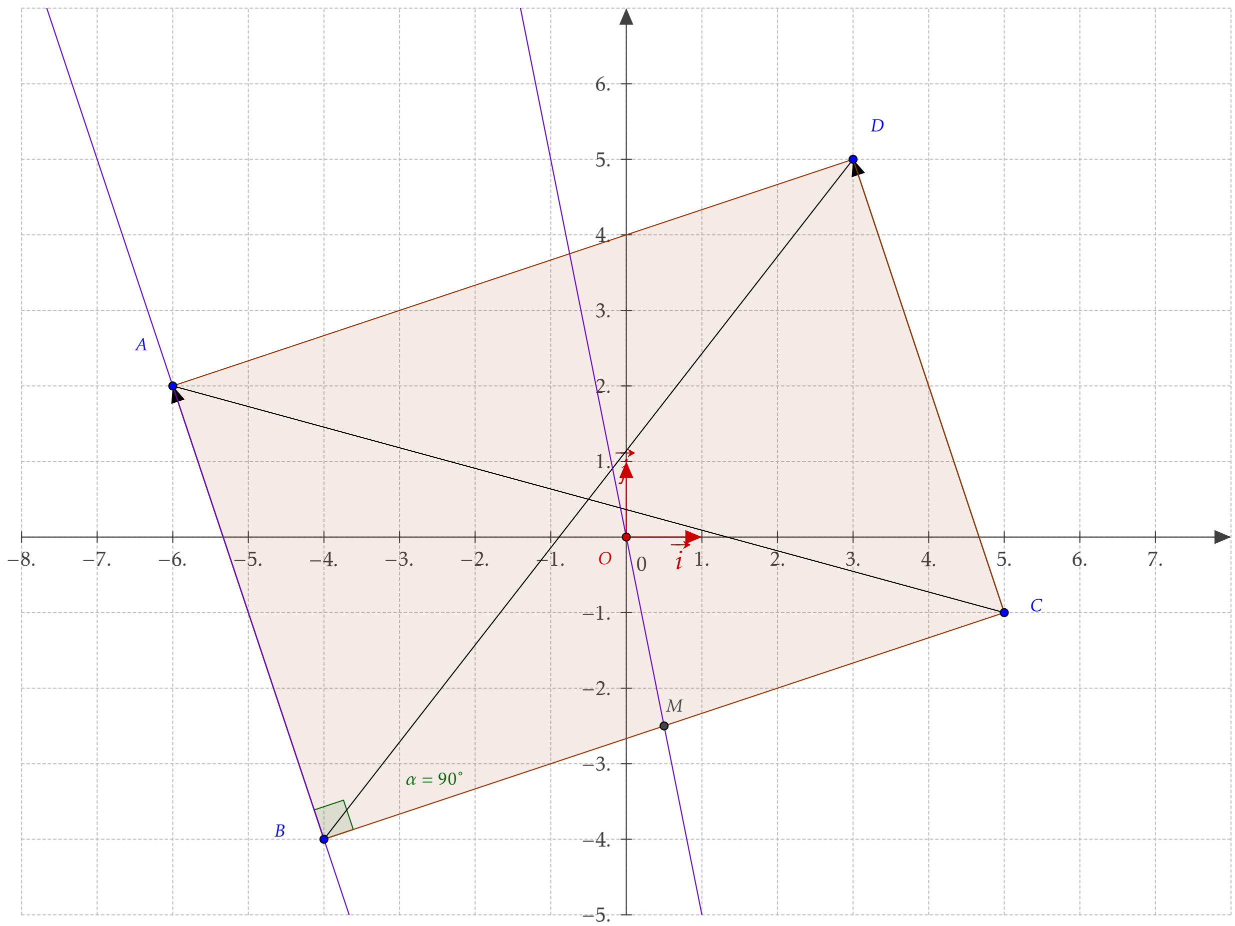
$\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{BP}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x=3x+3\\3-y=3y-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=4x\\15=4y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\\y=\frac{15}{4}\end{cases}$

Donc $\boxed{P\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{15}{4}\end{pmatrix}}$

Exercice 2 — 4 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions.

1 pt **1** Placer les points $A(-6;2)$, $B(-4;-4)$ et $C(5;-1)$.



1.5 pt **2** Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

$$\begin{array}{rl} ABCD \text{ est un parallélogramme} & \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \text{On pose} & D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4+6 \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} & \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-x \\ -1-y \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} & \iff \left\{ \begin{array}{l} 5-x=2 \\ -1-y=-6 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=5 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } D\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ alors le quadrilatère } ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

2 pts **3** **a.** Calculer les distances AC et BC.

$$\begin{array}{r|l} \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix} & \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5+4 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \\ AC^2 = 11^2 + 3^2 = 130 & BC^2 = 9^2 + 3^2 = 90 \\ AC = \sqrt{130} & BC = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \end{array}$$

$$\boxed{AC = \sqrt{130} \text{ et } BC = 3\sqrt{10}}$$

1 pt **b.** Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4+6 \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Ainsi $AB^2 = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$.
On a donc $AC^2 = 130 = 40 + 90 = AB^2 + BC^2$.
D'après la propriété réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B.

Le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme qui a un angle droit, c'est donc un rectangle.

1 pt **4** **a.** Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[BC]$.

Le milieu de $[BC]$ a pour coordonnées $M\begin{pmatrix}\frac{x_B+x_C}{2}\\ \frac{y_B+y_C}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-4+5}{2}\\ \frac{-4-1}{2}\end{pmatrix}$ soit

$$\boxed{M\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2}\end{pmatrix}}$$

1 pt **b.** Les droites (AB) et (OM) sont-elles parallèles ?

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\ -6\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x_M - x_O\\ y_M - y_O\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\text{dét}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OM}\right) &= \begin{vmatrix}2 & -\frac{1}{2}\\ -6 & -\frac{5}{2}\end{vmatrix}\\ &= 2\times\left(-\frac{5}{2}\right) - (-6)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= -5 - 3 = -8 \neq 0\end{aligned}$$

Conclusion :dét$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OM}\right) \neq 0$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires ; ainsi les droites (AB) et (OM) ne sont pas parallèles.

Exercice 3 — 7,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-2x)^2 - 9x^2$

1 pt **1** Développer $f(x)$

$$\begin{aligned}f(x) &= (1-2x)^2 - 9x^2\\ &= 1 - 4x + 4x^2 - 9x^2\\ &= -5x^2 - 4x + 1\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = 5x^2 - 4x + 1}$$

1 pt **2** Montrer que $f(x) = (1-5x)(x+1)$
Deux méthodes sont possibles :

Méthode 1	On développe	Méthode 2	On factorise
$(1-5x)(x+1)$	$= x + 1 - 5x^2 - 5x$	$f(x)$	$= (1-2x)^2 - 9x^2$
	$= -5x^2 - 4x + 1$		$= (1-2x)^2 - \left(3x^2\right)$
	$= f(x)$		$= (1-2x-3x)(1-2x+3x)$
			$= (1-5x)(x+1)$

Dans les deux cas, on a prouvé que $f(x) = (1-5x)(x+1)$

1 pt **3** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\iff (1-5x)(x+1) = 0\\ &\iff (1-5x) = 0 \text{ ou } (x+1) = 0\\ &\iff x = \frac{1}{5} \text{ ou } x = -1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-1\,;\,\frac{1}{5}\right\}}$$

2 pts **4** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.

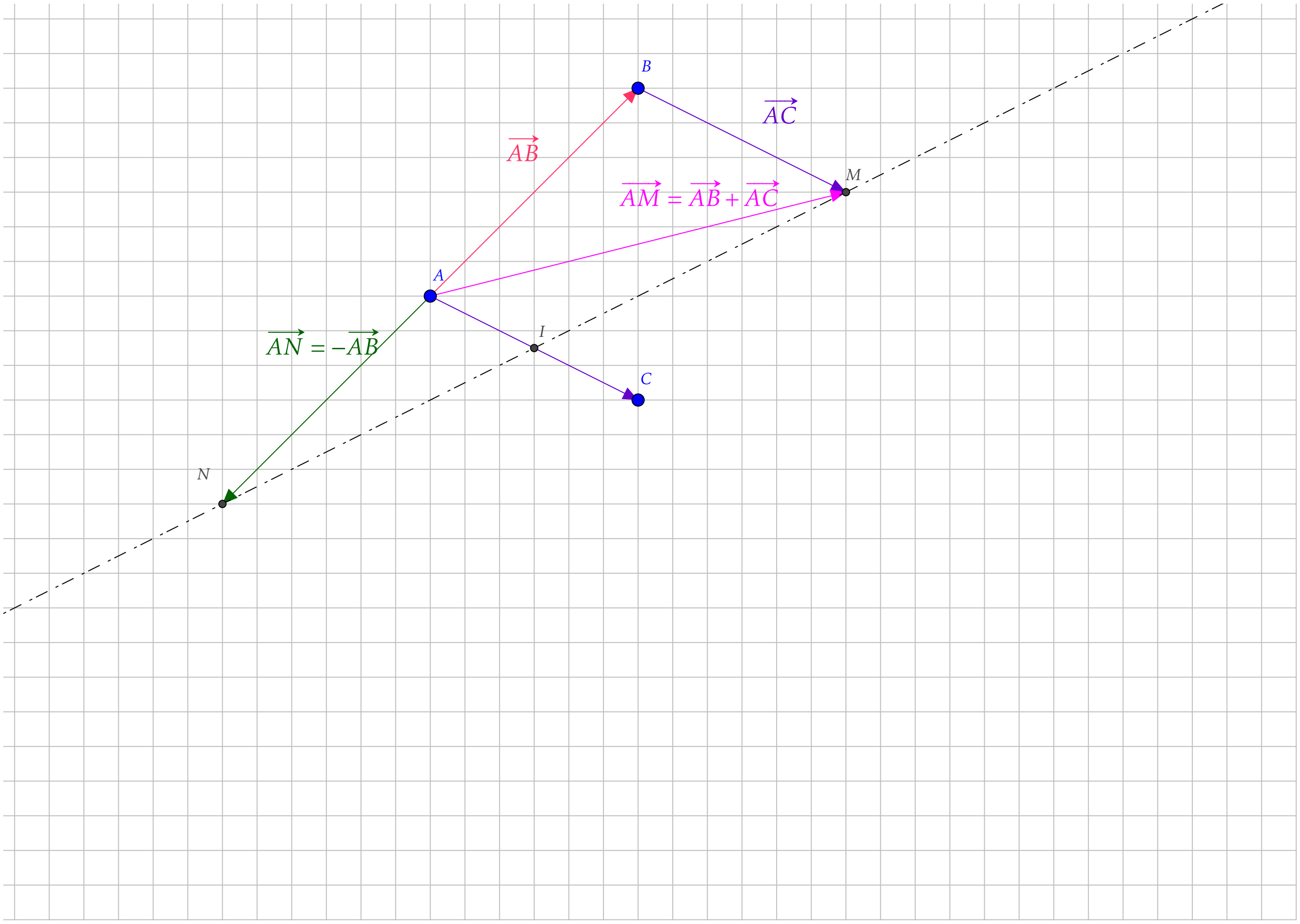
x	$-\infty$			-1			$\frac{1}{5}$		$+\infty$
signe de $(1-5x)$		+			+		0	-	
signe de $(x+1)$		-		0	+			+	
signe de $(1-5x)(x+1)$		-		0	+		0	-	

On lit l'ensemble des solutions sur le tableau précédent :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[-1\,;\,\frac{1}{5}\right]}$$

Exercice 4 — *5 points*

1 pt **1** Sur le dessin ci-dessous, placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.



1 pt **2** I est le point tel que $2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$. Montrer que I est le milieu du segment $[AC]$.

$$
\begin{array}{rll}
2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC} & \iff 2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}-\left(\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{IC}\right) & \text{d'après la relation de Chasles}\\
& \iff 2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC} & \text{signe - devant une parenthèse}\\
& \iff 2\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} & \text{car } -\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IB}\\
& \iff \cancel{2\overrightarrow{IB}}+\vec{0}=\overrightarrow{AI}+\cancel{2\overrightarrow{IB}}+\overrightarrow{IC} & \text{car } \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IB}\\
& \iff \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0} & \\
& \iff I \text{ est le milieu du segment } [AC] &
\end{array}
$$

2 pts **3** **Bonus** Les points M, I et N sont-ils alignés ?
On décompose les vecteurs $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{IM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$
\begin{array}{rl|rl}
\overrightarrow{IN} & =\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AN} & \overrightarrow{IM} & =\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AM}\\
& =-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB} & & =-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\
& =-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right) & & \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}
\end{array}
$$

Ainsi $\overrightarrow{IM}=-\overrightarrow{IN}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IN}$ sont colinéaires et donc les points M, I et N sont-ils alignés.