Nom :	DS 03	2nde 06 — Nov. 2023
Prénom :		Devoir nº 06 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso. Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 3 points

3 pts [Cours] Compléter sur le sujet Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a.

- Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
- Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
- Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exercice 2 — 3 points

Résoudre les équations données dans l'ensemble des nombres réels.

Remarque :

- Ne pas faire de conclusion, mais écrire simplement l'ensemble des solutions noté S.

1 pt **1** $3x + 4 = -5 + 13x$

$$\begin{aligned} 3x + 4 = -5 + 13x &\iff 3x - 13x = -5 - 4 \\ &\iff -10x = -9 \\ &\iff x = \tfrac{9}{10} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{9}{10}\right\}}$$

2 pts **2** $\frac{3}{5}x = \frac{7}{3}x - \frac{9}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x = \frac{7}{3}x - \frac{9}{4} &\iff 5 \times 3 \times 4 \times \frac{3}{5}x = 5 \times 3 \times 4 \times \frac{7}{3}x - 5 \times 3 \times 4 \times \frac{9}{4} \\ &\iff 36x = 140x - 135 \\ &\iff -104x = -135 \\ &\iff x = \frac{135}{104} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{135}{104}\right\}}$$

Exercice 3 — 3 points

3 pts Résoudre le système d'inéquations suivant, vous dessinerez les solutions sur un axe puis les donnerez sous forme d'intervalle.

$$\begin{cases} 2x - 5 > 8x - 4 \\ 5x - 4 \leq 2 - 7x \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll|lll} 2x-5>8x-4 & \iff & 2x-8x>-4+5 & 5x-4\leq 2-7x & \iff & 5x+7x\leq 2+4 \\ & \iff & -6x>1 & & \iff & 12x\leq 6 \\ & \iff & x<-\dfrac{1}{6} & & \iff & x\leq \dfrac{6}{12} \\ & & & & \iff & x\leq \dfrac{1}{2} \\ \mathcal{S}_1=\left]-\infty;-\dfrac{1}{6}\right[& & & \mathcal{S}_2=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right] & & \end{array}$$

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2=\left]-\infty;-\frac{1}{6}\right[$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\left]-\infty;-\frac{1}{6}\right[}$$

Exercice 4 **4 points**

Résoudre les équations données dans l'ensemble des nombres réels.

Remarque :

- Ne pas faire de conclusion, mais écrire simplement l'ensemble des solutions noté S.
- Bien chercher les éventuelles « valeur(s) interdite(s) »des équations quotients.

2.5 pts **1** $\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{2}{x+2}$

✍ Valeurs interdites :

- $2x+1=0 \iff 2x=-1 \iff x=-\frac{1}{2}$
- $x+2=0 \iff x=-2$

Donc -2 et $-\frac{1}{2}$ sont valeurs interdites.

✍ Si $x\neq -2$ et si $x\neq -\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+1}=\frac{2}{x+2} &\iff \frac{1}{2x+1}-\frac{2}{x+2}=0 \\ &\iff \frac{1(x+2)}{(2x+1)(x+2)}-\frac{2(2x+1)}{(x+2)(2x+1)}=0 \\ &\iff \frac{(x+2)-2(2x+1)}{(2x+1)(x+2)}=0 \\ &\iff \frac{x+2-4x-2}{(2x+1)(x+2)}=0 \\ &\iff \frac{-3x}{(2x+1)(x+2)}=0 \\ &\iff -3x=0 \\ &\iff x=0 \end{aligned}$$

✍ Comme $0\neq -2$ et $0\neq -\frac{1}{2}$, on déduit que 0 est solution.

$$\boxed{\mathcal{S}=\{0\}}$$

1.5 pt **2** $\dfrac{5x-7}{x^2+4}=0$

$\dfrac{5x-7}{x^2+4}=0$

✍ Valeur interdite : $x^2+4=0 \iff x^2=-4$
Cette équation n'a pas de solution, car le carré d'un réel est toujours positif.
Cette équation n'a pas de valeur interdite.

✍ $\dfrac{5x-7}{x^2+4}=0 \iff 5x-7=0 \iff 5x=7 \iff x=\frac{7}{5}$

✍ Comme il n'y a pas de valeur interdite on déduit que $\frac{7}{5}$ est solution.

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{5}\right\}}$$

Exercice 5 — 4 points

4 pts Développer et simplifier les expressions suivantes :

1 $A=(5x+3)(7-2x)$

$$\begin{aligned} A=(5x+3)(7-2x) \quad &= 35x-10x^2+21-6x \\ &= -10x^2+29x+21 \end{aligned}$$

2 $B=(3x+5)(3x-5)-(5x+3)^2$

$$\begin{aligned} B=(3x+5)(3x-5)-(5x+3)^2 \quad &= 9x^2-25-\left(25x^2+30x+9\right) \\ &= 9x^2-25-25x^2-30x-9 \\ &= -16x^2-30x-34 \end{aligned}$$

3 $C=7x^2+5x-3-4(4x-5)+2x(5-4x)$

$$\begin{aligned} C=7x^2+5x-3-4(4x-5)+2x(5-4x) \quad &= 7x^2+5x-3-16x+20+10x-8x^2 \\ &= -x^2-x+17 \end{aligned}$$

$$\boxed{A=-10x^2+29x+2, B=-16x^2-30x-34 \text{ et } C=-x^2-x+17}$$

Exercice 6 — 4 points

4 pts Résoudre les équations données dans l'ensemble des nombres réels.

1 $(3x-4)(2x+7)=0$

$$\begin{aligned} (3x-4)(2x+7)=0 \quad &\iff (3x-4)=0 \text{ ou } (2x+7)=0 \\ &\iff 3x=4 \text{ ou } 2x=-7 \\ &\iff x=\tfrac{4}{3} \text{ ou } x=-\tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{4}{3};-\frac{7}{2}\right\}}$$

2 $(3x+4)^2=7$

$$\begin{aligned} (3x+4)^2=7 \quad &\iff (3x+4)^2-\sqrt{7}^2=0 \\ &\iff \left(3x+4-\sqrt{7}\right)\left(3x+4+\sqrt{7}\right)=0 \\ &\iff \left(3x+4-\sqrt{7}\right)=0 \text{ ou } \left(3x+4+\sqrt{7}\right)=0 \\ &\iff 3x=-4+\sqrt{7} \text{ ou } 3x=-4-\sqrt{7} \\ &\iff x=\tfrac{-4+\sqrt{7}}{3} \text{ ou } x=\tfrac{-4-\sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{-4+\sqrt{7}}{3};\frac{-4-\sqrt{7}}{3}\right\}}$$

3 $(9-4x)^2 = -25$ Le carré d'un réel étant toujours positif, cette équation n'a pas de solution.

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

Exercice 7 — 5 points

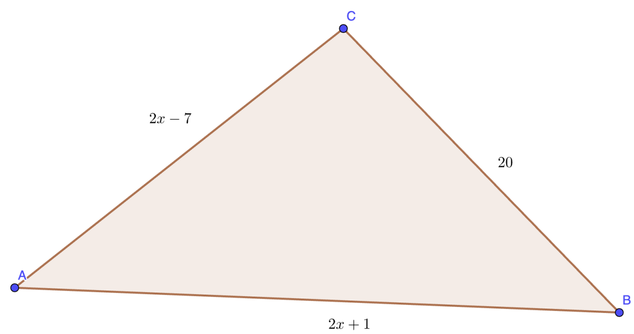
On considère la figure ci-contre(x désigne un nombre strictement positif.)

1 Développer $(2x-7)^2$ et $(2x+1)^2$.

$$\boxed{\begin{array}{c}(2x-7)^2 = 4x^2 - 28x + 49 \\ (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1\end{array}}$$

2 On veut savoir s'il existe un valeur de x pour laquelle le triangle ABC est rectangle en C.
Montrer que la solution de ce problème revient à résoudre l'équation :

$$-28x + 449 = 4x + 1$$



$$\begin{aligned} ABC \text{ est rectangle en } C &\iff AC^2 + CB^2 = AB^2 \\ &\iff (2x-7)^2 + 20^2 = (2x+1)^2 \\ &\iff 4x^2 - 28x + 49 + 400 = 4x^2 + 4x + 1 \\ &\iff -28x + 449 = 4x + 1 \end{aligned}$$

3 Résoudre cette équation puis conclure.

$$\begin{aligned} -28x + 449 = 4x + 1 &\iff 32x = 448 \\ &\iff x = \frac{448}{32} \\ &\iff x = 14 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le triangle } ABC \text{ est rectangle en } C \text{ ssi } x = 14. \text{ On peut vérifier que } 21^2 + 20^2 = 441 + 400 = 841 = 29^2}$$