Nom : .... Prénom :	DS 02	2nde 09 Oct. 2023 Devoir n° 04 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 3,5 points

1 pt **1** Donne la définition d'un nombre premier.

$\boxed{\text{Un nombre est premier s'il a exactement deux diviseurs positifs.}}$

2.5 pts **2** Les nombres 241 et 255 sont-ils premiers ? Justifier.

- 255 est divisible par 5, il a donc au moins 3 diviseurs : 1, 5 et 255 :

  $\boxed{\text{255 n'est pas premier.}}$

- ✍ Pour 241, on teste les nombres premiers inférieurs ou égaux à sa $\sqrt{241} \approx 15$.
  ✍ 241 n'est pas divisible par 2,3 et 5 d'après les critères de divisibilité.
  ✍ Il reste à tester 7 ;11et 13 :

$$\frac{241}{7} \approx 34,4$$
$$\frac{241}{11} \approx 21,9$$
$$\frac{241}{13} \approx 18,5$$

241 n'admet aucun diviseur premier inférieur ou égal à sa racine carrée, il est donc premier.

$\boxed{\text{241 est un nombre premier.}}$

Exercice 2 — 6 points

2 pts **1** Ecrire la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres 496 et 284.

$$\begin{array}{r|l} 496 & 2 \\ 248 & 2 \\ 124 & 2 \\ 62 & 2 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 284 & 2 \\ 142 & 2 \\ 71 & 71 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{496 = 2^4 \times 31 \text{ et } 284 = 2^2 \times 71}$$

1 pt **2** Calculer le PGCD de 496 et 284.
$PGCD(496; 284) = 2^2 = 4$

$$\boxed{PGCD(496; 284) = 4}$$

2 pts **3** Dresser la liste des diviseurs de 496.

$$\boxed{Div(496) = \{1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496\}}$$

1 pt **4**

Définition 1

- Un nombre d est un diviseur strict de n si d est un diviseur de n et $d < n$.
- Un entier n est parfait si et seulement si la somme des diviseurs stricts de n est égale à n.

Le nombre 496 est-il parfait ?

✍ On fait la somme des diviseurs stricts de 496 :

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$$

✍ la somme des diviseurs stricts de 496
est égale à 496.

$$\boxed{\text{Le nombre 496 est parfait.}}$$

Exercice 3 — *2,5 points*

2.5 pts

1 Simplifiez les expressions suivantes :

a. $(6x)^2 = 6x \times 6x = 36x^2$

b. $-4x^2 - 10x + 6 + 11x^2 - x + 9 = 7x^2 - 11x + 15$

2 Ecrire avec des symboles mathématiques :

a. La somme du carré de x et du dixième de x est $x^2 + \dfrac{1}{10}x$.

b. Le double de la différence des carrés de x et y est $2\left(x^2 - y^2\right)$.

3 Combien y-atil de facteurs dans $-15wxyz$ est un produit de 5 facteurs qui sont $-15, w, x, y$ et z.

Exercice 4 — *4,5 points*

Développer les expressions suivantes :

0.5 pt **1** $A = 2(3x - 5)$

$$\boxed{A = 6x - 10}$$

1 pt **2** $B = (2x + 3)^2$

$$\begin{aligned} B = (2x+3)^2 \quad &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 \end{aligned}$$

$$\boxed{B = (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9}$$

1.5 pt **3** $C = -2x(7x + 11) - (3x - 2)$

$$\begin{aligned} C = -2x(7x+11) - (3x-2) \quad &= -14x^2 - 22x - 3x + 2 \\ &= -14x^2 - 25x + 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{C = -2x(7x+11)-(3x-2) = -14x^2-25x+2}$$

1.5 pt **4** $D = (3x+7)^2-(2x+1)^2$

$$\begin{aligned} D = (3x+7)^2-(2x+1)^2 &= (3x)^2+2\times 3x\times 7+7^2-((2x)^2+2\times 2x\times 1+1^2) \\ &= 9x^2+42x+49-(4x^2+4x+1) \\ &= 9x^2+42x+49-4x^2-4x-1 \\ &= 5x^2+38x+48 \end{aligned}$$

$$\boxed{D = (3x+7)^2-(2x+1)^2 = 5x^2+38x+48}$$

Exercice 5 — 5 points

Factoriser les expressions suivantes :

1 pt **1** $A = x^2+8x$

$$\boxed{A = x^2+8x = x(x+8)}$$

1.5 pt **2** $B = (2x+1)^2-(3x+4)^2$

$$\begin{aligned} B = (2x+1)^2-(3x+4)^2 &= ((2x+1)-(3x+4))((2x+1)-(3x+4)) \\ &= (2x+1-3x-4)(2x+1+3x+4) \\ &= (-x-3)(5x+5) \\ &= 5(x+1)(-x-3) \end{aligned}$$

$$\boxed{B = (2x+1)^2-(3x+4)^2 = 5(x+1)(-x-3)}$$

1 pt **3** $C = x^2+10x+25$

$$\boxed{C = x^2+10x+25 = (x+5)^2}$$

1.5 pt **4** $D = 16x^2+8x+1+(4x+1)(2x-3)$

$$\begin{aligned} D = 16x^2+8x+1+(4x+1)(2x-3) &= (4x+1)^2+(4x+1)(2x-3) \\ &= (4x+1)(4x+1)+(4x+1)(2x-3) \\ &= (4x+1)((4x+1)+(2x-3)) \\ &= (4x+1)(6x-2) \end{aligned}$$

$$\boxed{D = 16x^2+8x+1+(4x+1)(2x-3) = 2(4x+1)(3x-1)}$$

Exercice 6 — 2 points

2 pts Démontrer que si n est impair alors n^2-6n+1 est divisible par 4 .
Si n est impair alors il existe un entier k tel que $n = 2k+1$.On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} n^2-6n+1 &= (2k+1)^2-6(2k+1)+1 \\ &= 4k^2+4k+1-12k-6+1 \\ &= 4k^2-8k-4 \\ &= 4(k^2-2k-1) \end{aligned}$$

Ici k est un entier , donc k^2-2k-1 est un entier, ce qui prouve que n^2-6n+1 est divisible par 4.

$$\boxed{\text{Ainsi si } n \text{ est impair alors } n^2-6n+1 \text{ est divisible par 4 .}}$$

Exercice 7 Bonus! **3 points**

3 pts Est-il possible d'ajouter un même nombre réel au numérateur et au dénominateur de $\frac{3}{4}$ pour obtenir le triple de ce nombre rationnel ?

On cherche s'il existe un réel x tel que

$$\frac{3+x}{4+x} = 3\times\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3+x}{4+x} = 3\times\frac{3}{4} \quad & \Longleftrightarrow \frac{3+x}{4+x} = \frac{9}{4} \\
& \Longleftrightarrow 4(3+x) = 9(4+x) \quad \text{Egalité du produit en croix} \\
& \Longleftrightarrow 12+4x = 36+9x \\
& \Longleftrightarrow 5x = -24 \\
& \Longleftrightarrow x = -\frac{24}{5}
\end{aligned}$$

Si on ajoute $= -\frac{24}{5}$ au numérateur et au dénominateur de $\frac{3}{4}$, on obtient le triple de ce nombre.