Nom : .... Prénom :	**DS8**	2nde 09 Devoir n° 12	Mars 2024 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 6 points

1 pt **1** Toute droite $\mathcal{D}$ non parallèle à l'axe $(O;\vec{j})$ po $y = mx + p$.

1 pt **2** p e
de $\mathcal{D}$ qui coupe $(O;\vec{j})$ en $B(0;p)$.

1 pt **3** m e $\mathcal{D}$ qui e $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

1 pt **4** Si $\mathcal{D}$ e $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$, alors $m = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

5 Si $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix} \in \mathcal{D}$ alors l'équation réduite de $\mathcal{D}$ e

1 pt [$\square$] soit par : $y = mx + p$ avec $p = y_A - mx_A$.

1 pt [$\square$] soit par : $y - y_A = m(x - x_A)$.

Exercice 2 — 4 points

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$

1.5 pt **1** La droite $\mathcal{D}$ passe par les points $A(3;2)$ et $B(2;5)$.
La droite $\mathcal{D}$ est dirigée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-3\\5-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
Ainsi le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ est $m = \dfrac{v}{h} = \dfrac{3}{-1} = -3$
La droite $\mathcal{D}$ a donc pour équation $y - y_A = m(x - x_A)$

$$\begin{aligned} y - y_A &= m(x - x_A) \\ y - 2 &= -3(x-3) \\ y &= -3x + 9 + 2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La droite } \mathcal{D} \text{ a donc pour équation réduite : } y = -3x + 11}$

1.5 pt **2** La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et passe par le point $C(2;1)$.

Comme le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ dirige la droite $\mathcal{D}$; elle a pour coefficient directeur $m = \dfrac{v}{h} = \dfrac{3}{4}$ La droite $\mathcal{D}$ a donc pour équation $y - y_C = m(x - x_C)$

$$\begin{aligned} y - y_C &= m(x - x_C) \\ y - 1 &= \frac{3}{4}(x-2) \\ y &= \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La droite } \mathcal{D} \text{ a donc pour équation réduite : } y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}}$$

1 pt **3** La droite $\mathcal{D}$ est parallèle à la droite d d'équation $y = -3x + \frac{1}{2}$ et passe par le point $E(2;3)$.
$\mathcal{D}$ est parallèle à la droite d, donc elles ont toutes les deux pour coefficient directeur $m = -2$.
La droite $\mathcal{D}$ a donc pour équation $y - y_E = m(x - x_E)$

$$\begin{aligned} y - y_E &= m(x - x_E) \\ y - 3 &= -3(x-2) \\ y &= -3x + 6 + 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La droite } \mathcal{D} \text{ a donc pour équation réduite : } y = -3x + 9}$$

Exercice 3 — *9,5 points*

1 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (*donné en annexe ci-dessous*) :

1 pt **a.** placer les points $A(4;5)$, $B(-4;-2)$ et $C(6;0)$;
Sur la figure en fin d'exercice.

1 pt **b.** tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x$.
On détermine deux points en donnant deux valeurs à x :

- si $x = 0$ alors $y = 0$
- si $x = 2$ alors $y = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

La droite $\mathcal{D}$ passe par $O(0,0)$ et $E(2;1)$.

1.5 pt **2** Justifier que la droite $\mathcal{D}$ est une médiane du triangle ABC.
On montre que $\mathcal{D}$ passe par B et coupe le côté opposé en son milieu J,

- Comme $y_B = -2 = \frac{1}{2} \times (-4) = \frac{1}{2}x_B$, aon a prouvé que $B \in \mathcal{D}$.
- Le milieu J de $[BC]$ est $J : \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_C}{2} \\ \frac{y_A + y_C}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4+6}{2} \\ \frac{5+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$; on remarque que $y_J = 2,5 = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{1}{2}x_J$, donc $J \in \mathcal{D}$.

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ passe par } B \text{ et coupe } (AC) \text{ en son milieu, donc } \mathcal{D} \text{ es la médiane issue de } B \text{ dans } ABC.}$$

1 pt **3** **a.** Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$.

Le milieu I de $[BC]$ est $I \begin{pmatrix} \frac{x_B + x_C}{2} \\ \frac{y_B + y_C}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4+6}{2} \\ \frac{-2+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{I \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est le milieu du segment } [BC]}$$

1 pt **b.** Montrer que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AI).

Le vecteur $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}x_I - x_A\\y_I - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-4\\-1-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AI) ;

on remarque alors que $\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$;

donc $\overrightarrow{AI} = -3\vec{u}$, ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$\vec{u}$ est donc un vecteur directeur de la droite (AI).

1 pt **c.** Déterminer une équation de la droite (AI).

Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ dirige (AI), son coefficient directeur est $m = \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{2}{1} = 2$.

L'équation réduite de (AI), est de la forme :

$$\begin{aligned} y - y_A &= m(x - x_A)\\ y - 5 &= 2(x-4)\\ y &= 2x - 8 + 5\\ y &= 2x - 3 \end{aligned}$$

L'équation réduite de la droite (AI) est $y = 2x - 3$.

2 pts **4** **a.** Résoudre le système $\begin{cases} y = 2x - 3\\ y = \dfrac{1}{2}x \end{cases}$.

En utilisant la méthode de comparaison :

$$\begin{aligned} 2x - 3 = \frac{1}{2}x &\iff 4x - 6 = x \text{ en multipliant par } 2\\ &\iff 3x = 6\\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

En reportant $x = 2$ dans $y = 2x - 3$, on trouve $y = 2 \times 2 - 3 = 1$.

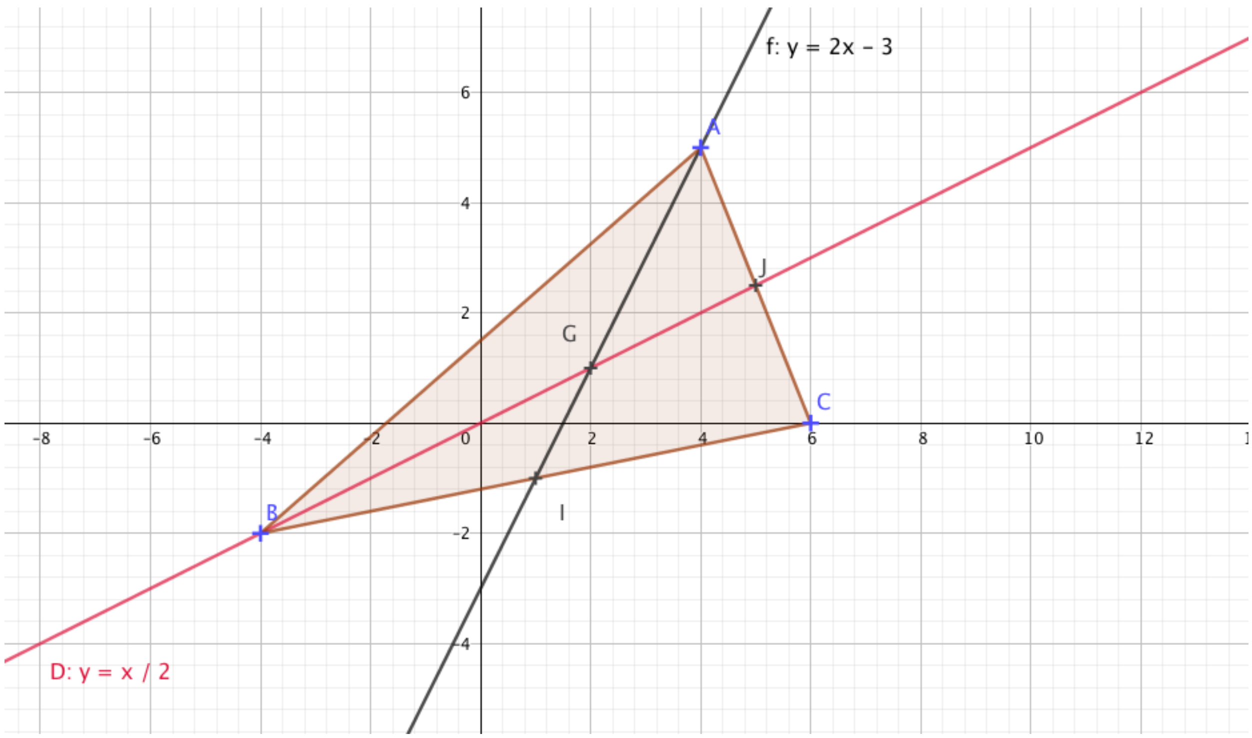
L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{(2;1)\}$

1 pt **b.** En déduire les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
Le centre de gravité G du triangle ABC se trouve à l'intersection de deux médianes.

- $\mathcal{D} : y = \dfrac{1}{2}x$ est la médiane issue de B dans ABC.
- $(AI) : y = 2x - 3$ est la médiane issue de A dans ABC

donc G est à l'intersection des droites $\mathcal{D}$ et (AI)

Ainsi $G\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$



Exercice 4 **4,5 points**

2 pts **1** $\begin{cases} 3x+4y=2 \\ 5x+3y=7 \end{cases}$

On calcule le déterminant du système : $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3\times 3 - 5\times 4 = 9-20 = -11$

Comme $D \neq 0$, on peut affirmer que le système a un unique couple solution.
On utilise la méthode de combinaison :

$$\begin{cases} 3x+4y=2 & {\color{red}(\times 3)} \\ 5x+3y=7 & {\color{red}(\times -4)} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 9x+12y & =6 \\ -20x-12y & =-28 \\ \hline -11x & =-22 \\ x & =2 \end{array}$$

On reporte $x=2$ dans la première équation :

$$3x+4y=2 \iff 6+4y=2 \iff 4y=-4 \iff y=-1$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\{(2;-1)\}}$$

2.5 pts **2** La somme de deux nombres x et y est 15. La différence de leurs carrés est 135. Quels sont ces nombres? En notant x et y les deux nombres cherchés, on a :

$$\begin{cases} x+y=14 \\ x^2-y^2=84 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=15 \\ (x+y)(x-y)=84 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=14 \\ 15(x-y)=84 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=14 \\ (x-y)=\dfrac{84}{14}=6 \end{cases}$$

En utilisant la méthode d'addition , on a : $\begin{array}{ll} x+y & =14 \\ x-y & =6 \\ \hline 2x & =20 \\ x & =10 \end{array}$

En reportant $x=10$ dans l'équation $x+y=14$, on a $10+y=14$, donc $x=4$

$$\boxed{\text{Les deux réels cherchés sont 10 et 4.}}$$