Nom :	**DS 02**	2nde 06	Oct. 2022
Prénom :		*Devoir n° 04*	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *6 points*

6 pts

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée, seule la réponse est attendue.

	Énoncé	Réponse
1.	Décomposer en produit de facteurs premiers 45.	$\boxed{45 = 3^2 \times 5}$
2.	Compléter avec les exposants qui conviennent :	$\boxed{5^{50} \times 15^{100} = 3^{100s} \times 5^{150}}$
3.	Indiquer le plus petit ensemble de nombres auquel appartient $\dfrac{\sqrt{16}}{2}$	$\boxed{\dfrac{\sqrt{16}}{2} = 2 \in \mathbb{N}}$
4.	On donne le programme de calcul suivant : • Choisir un nombre ; • Elever au carré ; • Multiplier le résultat par 2 ; • Retrancher 8. Quel nombre obtient-on en choisissant -3 ?	• On choisit -3 ; • on l'élève au carré ; $(-3)^2 = 9$ • On multiplier le résultat 9 par 2 ; on obtient 18 • On retranche 8. 18-8=10 On obtient donc 10.
5.	Quel est le nombre négatif qui, multiplié par lui-même donne 5 ?	le nombre est $-\sqrt{5}$.
6.	Écrire sous la forme a^n avec $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$:	$a = \dfrac{3^5 \times 27}{9^3} = \dfrac{3^5 \times 3^3}{(3^2)^3} = \dfrac{3^8}{3^6} = 3^2$ $\boxed{a = 3^2}$

Exercice 2 — *10 points*

1 pt **1** Rappeler la définition d'un nombre premier.
Un nombre entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs positifs.

3 pts **2** Ecrire la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres 240 et 1500 et 984.

$$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1500 & 2 \\ 750 & 2 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 984 & 2 \\ 492 & 2 \\ 246 & 2 \\ 123 & 3 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{240 = 2^4 \times 3 \times 5\,;\, 1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3 \text{ et } 984 = 2^3 \times 3 \times 41}$$

3 pts **3** Ecrire sous forme d'une fraction iréductible , en utilisant la question 1) , les nombres $A = \dfrac{240}{984}$ et $B = \dfrac{1}{984} + \dfrac{1}{240}$.
Les calculs doivent être détaillés.

$$\begin{aligned} A &= \frac{240}{984} \\ &= \frac{2^4 \times 3 \times 5}{2^3 \times 3 \times 41} \\ &= \frac{2 \times 5}{41} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{10}{41}}$$

3 pts **4** Les nombres 133 et 173 sont-ls premiers ? Justifier.
$133 = 7 \times 19$, donc 133 n'est pas premier. En effet, 133 a au moins 3 diviseurs 1, 7 et lui-même.
Pour 173, on montre que 173 n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à sa racine carrée $\sqrt{173} \approx 13,1$.

- En utilisant les critères de divisibilité, 173 n'est pas divisible par 2 ;3 et 5.
- $\dfrac{173}{7} \approx 24,7$ donc 173 n'est pas divisible par 7.
- $\dfrac{173}{11} \approx 15,7$ donc 173 n'est pas divisible par 11.
- $\dfrac{173}{13} \approx 13,3$ donc 173 n'est pas divisible par 13.

$$\boxed{\text{173 est donc un nombre premier.}}$$

Exercice 3 — 10 points

Développer les expressions suivantes :

1 pt **1** $A = (x+3)(x+5) + (3x+1)(x+2)$

1 pt **2** $B = (x-4)^2 + (x+1)(1-4x)$

1.5 pt **3** $C = (3x+2)^2 + (3x-2)^2$

1.5 pt **4** $D = (7x+2)^2 - (2x+7)^2$

1 pt **a.** $A = (x+3)(x+5) + (3x+1)(x+2)$

$$\begin{aligned} A &= (x+3)(x+5) + (3x+1)(x+2) \\ &= x^2 + 5x + 3x + 15 + 3x^2 + 6x + x + 2 \\ &= 4x^2 + 15x + 17 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = (x+3)(x+5) + (3x+1)(x+2) = 4x^2 + 15x + 17}$$

1 pt **b.** $B=(x-4)^2+(x+1)(1-4x)$

$$\begin{aligned} B &= (x-4)^2+(x+1)(1-4x) \\ &= x^2-8x+16+x-4x^2+1-4x \\ &= -3x^2-12x+17 \end{aligned}$$

$$\boxed{B=(x-4)^2+(x+1)(1-4x)=-3x^2-12x+17}$$

1.5 pt **c.** $C=(3x+2)^2+(3x-2)^2$

$$\begin{aligned} C &= (3x+2)^2+(3x-2)^2 \\ &= 9x^2+2\times 3x\times 2+2^2+\left(9x^2-2\times 3x\times 2+2^2\right) \\ &= 9x^2+12x+4+9x^2-12x+4 \\ &= 18x^2+8 \end{aligned}$$

$$\boxed{C=(3x+2)^2+(3x-2)^2=18x^2+8}$$

1.5 pt **d.** $D=(7x+2)^2-(2x+7)^2$

$$\begin{aligned} D &= (7x+2)^2-(2x+7)^2 \\ &= 49x^2+2\times 7x\times 2+2^2-\left(4x^2+14x+49\right) \\ &= 49x^2+28x+4-4x^2-14x-49 \\ &= 45x^2+14x-45 \end{aligned}$$

$$\boxed{D=(7x+2)^2-(2x+7)^2=45x^2+14x-45}$$

Exercice 4 — *5 points*

Factoriser les expressions suivantes :

1 pt **1** $A=(3x+1)(x+2)+3(3x+1)$

$$\begin{aligned} A &= (3x+1)(x+2)+3(3x+1) \\ &= (3x+1)[(x+2)+3] \\ &= (3x+1)(x+2+3) \\ &= (3x+1)(x+5) \end{aligned}$$

$$\boxed{A=(3x+1)(x+2)+3(3x+1)=(3x+1)(x+5)}$$

1.5 pt **2** $B=(x-5)(x+1)+2x-10$

$$\begin{aligned} B &= (x-5)(x+1)+2x-10 \\ &= (x-5)(x+1)+2(x-5) \\ &= (x-5)[(x+1)+2] \\ &= (x-5)(x+3) \end{aligned}$$

$$\boxed{B=(x-5)(x+1)+2x-10=(x-5)(x+3)}$$

1 pt **3** $C=4x^2-25$

$$\begin{aligned} C &= 4x^2-25 \\ &= (2x)^2-5^2 \\ &= (2x-5)(2x+5) \end{aligned}$$

$$\boxed{C = 4x^2 - 25 = (2x-5)(2x+5)}$$

1.5 pt **4** $D = (3x+7)^2 - (2x+1)^2$

$$\begin{aligned} D &= (3x+7)^2 - (2x+1)^2 \\ &= [(3x+7-(2x+1)][(3x+7+(2x+1)] \\ &= (3x+7-2x-1)(3x+7+2x+1) \\ &= (x+6)(5x+8) \end{aligned}$$

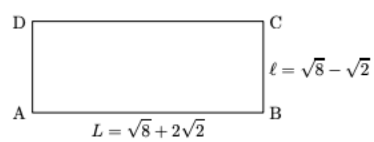
$$\boxed{D = (3x+7)^2 - (2x+1)^2 = (x+6)(5x+8)}$$

Exercice 5 — 2 points

2 pts Démontrer que la somme de deux nombres impairs est paire.
Un nombre entier impair est de la forme $n = 2k+1$ où k est un entier.
Un deuxième entier impair est de la forme $m = 2\ell+1$ où ℓ est un entier.
Leur somme est $S = n = m = 2k+1+2\ell+1 = 2k+2\ell+2 = 2(k+\ell+1)$, comme $k+\ell+1$ est un entier comme somme d'entiers on a prouvé que $m+n$ est un entier pair, d'où le résultat souhaité.

Exercice 6 Bonus ! — 2 points

2 pts On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = \sqrt{8} + 2\sqrt{2}$ et $BC = \sqrt{8} - \sqrt{2}$



Calculer l'aire et le périmètre du rectangle $ABCD$.

- Déjà $\sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$, ainsi $AB = \sqrt{8} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ et $BC = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$
- Le périmètre de $ABCD$ est $P = 2(AB+BC) = 2(4\sqrt{2}+\sqrt{2}) = 10\sqrt{2}$
- L'aire de $ABCD$ est $\mathcal{A} = AB \times BC = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \times 2 = 8$.