Nom :	**DS 07**	2NDE08 — Fév. 2022
Prénom :		Devoir n° 07 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.
Dans chaque exercice, le plan est muni d'un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ orthonormé.

Exercice 1 — 3 points

Cours : Relevez et complétez les phrases suivantes sur votre copie.

1 pt 1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\text{dét}(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

1 pt 2. A, B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

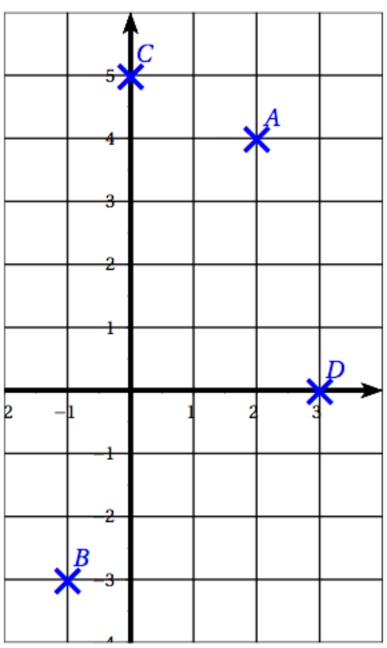
1 pt 3. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned} \text{A, B et C sont alignés} &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires.} \\ &\iff \text{dét}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 0 \end{aligned}$$

Exercice 2 — 2 points

2 pts

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, placer les points $A(2\ ;\ 4)$, $B(-1\ ;\ -3)$, $C(0\ ;\ 5)$ et $D(3\ ;\ 0)$.



Exercice 3 — 1 point

1 pt

On considère les points $A(2\ ;\ 7)$ et $B(-3\ ;\ -5)$.

Calculer la longueur AB.

$\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ -5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} AB^2 &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 \\ &= 169 \end{aligned}$$

Donc $AB = \sqrt{169} = 13$

$$\boxed{AB = 13}$$

Exercice 4 — *2 points*

2 pts

On considère les points $A(2\ ;\ 5)$, $B(7\ ;\ 1)$, $C(1\ ;\ -3)$.

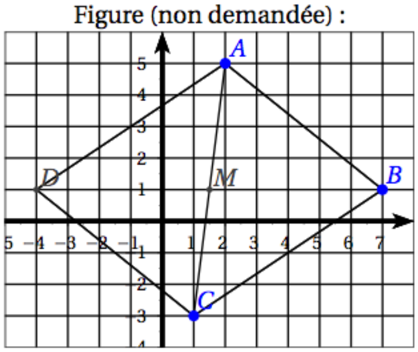
Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.On posera $D(x;y)$ ...

$\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} : \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -3-y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} ABCD\text{est un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ &\iff \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -3-y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 1-x = 5 \\ -3-y = -4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x = 4 \\ -3-y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\boxed{D(-4;1) \text{ est donc le point tel que } ABCD \text{ soit un parallélogramme}}$$

Figure (non demandée) :



Exercice 5 — *1,5 point*

1.5 pt

Le point $A\left(2\ ;\ \sqrt{3}\right)$ appartient-il au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{7}$?

Notons Γ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{7}$:

$$A \in \Gamma \iff OA = \sqrt{7}$$

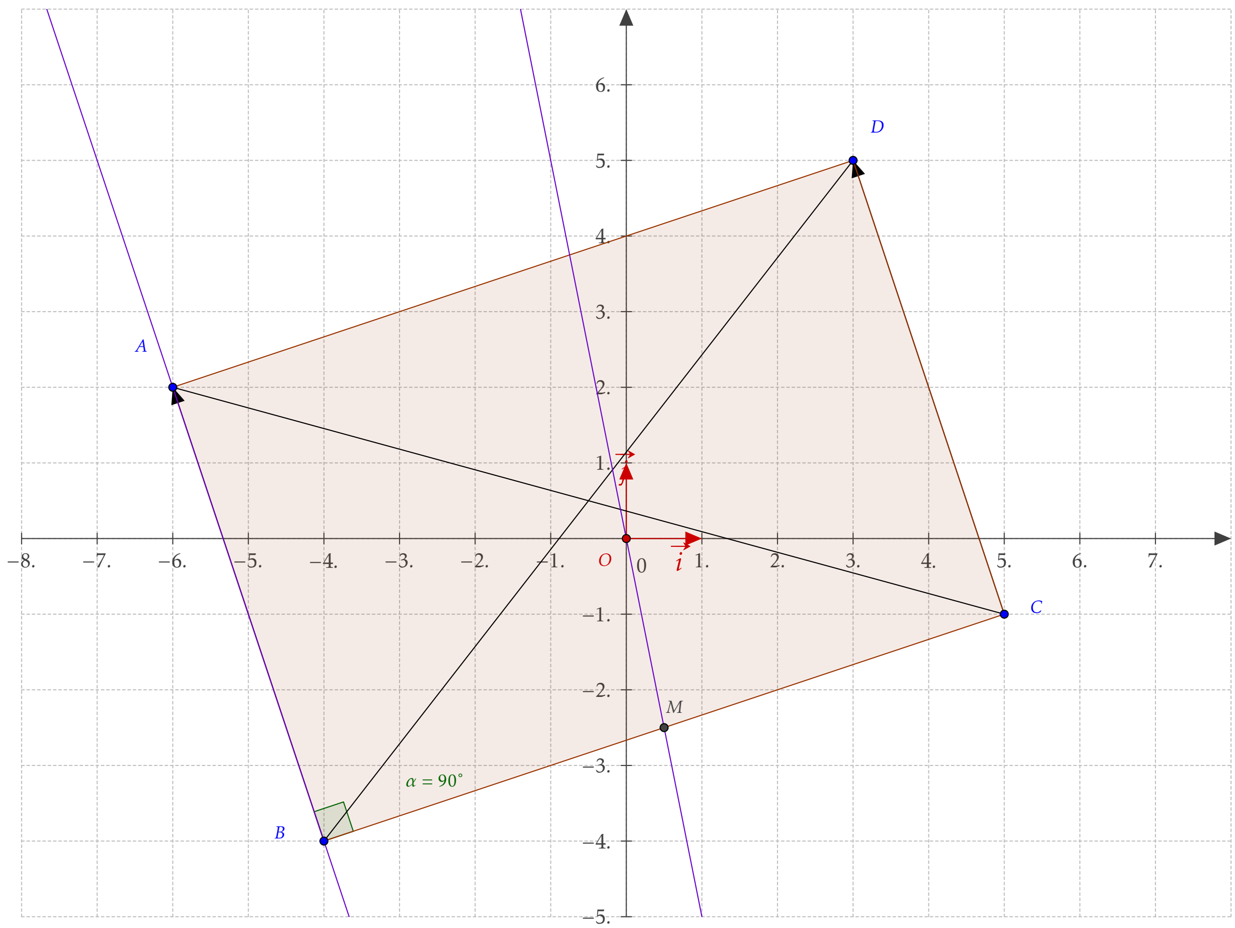
Comme $\overrightarrow{OA} : \begin{pmatrix} x_A - x_O \\ y_A - y_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, on déduit $OA^2 = 2^2 + \sqrt{3}^2 = 4 + 3 = 7$.

$$\boxed{\text{Ainsi } OA = \sqrt{7} \text{ et donc } A \in \Gamma.}$$

Exercice 6 — **9,5 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions.

1 pt — **1** Placer les points $A(-6;2)$, $B(-4;-4)$ et $C(5;-1)$.



1.5 pt — **2** Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

$$ABCD \text{ est un parallélogramme} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\text{On pose} \quad D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4+6 \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-x \\ -1-y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \begin{cases} 5-x=2 \\ -1-y=-6 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } D\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ alors le quadrilatère } ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

2 pts — **3** **a.** Calculer les distances AC et BC.

$$\begin{array}{r|l} \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}11\\-3\end{pmatrix} & \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5+4\\-1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix} \\ AC^2=11^2+3^2=130 & BC^2=9^2+3^2=90 \\ AC=\sqrt{130} & BC=\sqrt{90}=3\sqrt{10} \end{array}$$

$$\boxed{AC=\sqrt{130} \text{ et } BC=3\sqrt{10}}$$

1 pt **b.** Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4+6\\-4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$

Ainsi $AB^2=2^2+6^2=4+36=40$.

On a donc $AC^2=130=40+90=AB^2+BC^2$.

D'après la propriété réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B.

Le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme qui a un angle droit, c'est donc un rectangle.

1 pt **4** **a.** Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[BC]$.

Le milieu de $[BC]$ a pour coordonnées $M\begin{pmatrix}\frac{x_B+x_C}{2}\\\frac{y_B+y_C}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-4+5}{2}\\\frac{-4-1}{2}\end{pmatrix}$ soit

$$\boxed{M\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}}$$

2 pts **b.** On donne $E(8;-2)$. Les points A, C et E sont-ils alignés ?

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}11\\-3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E-x_A\\y_E-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8+6\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{dét}\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right) &= \begin{vmatrix}11 & 14\\-3 & -4\end{vmatrix} \\ &= 11\times(-4)-(-3)\times 14 \\ &= -44+42=-2\neq 0 \end{aligned}$$

Conclusion :dét$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)\neq 0$, donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires ; ainsi les points A, C et E ne sont pas alignés.

1 pt **c.** Les droites (AB) et (OM) sont-elles parallèles ?

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x_M-x_O\\y_M-y_O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{dét}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OM}\right) &= \begin{vmatrix}2 & \frac{1}{2}\\-6 & -\frac{5}{2}\end{vmatrix} \\ &= 2\times\left(-\frac{5}{2}\right)-(-6)\times\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -5+3=-2\neq 0 \end{aligned}$$

Conclusion :dét$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OM}\right)\neq 0$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OM}$ ne sont pas colinéaires ; ainsi les droites (AB) et (OM) ne sont pas parallèles.

Exercice 7 — 3 points

3 pts **1** $(2x+7)(8-5x) \geq 0$;

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{8}{5}$		$+\infty$
signe de $(2x+7)$		-	0	+		+	
signe de $8-5x$		+		+	0	-	
signe de $f(x)$		-	0	+	0	-	

$(2x+7)(8-5x) \geq 0 \iff f(x) \geq 0$
On lit l'ensemble des solutions sur le tableau précédent :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[-\frac{7}{2} ; \frac{8}{5}\right]}$$