Nom :	**DS 07**	2nde07 oiselet — Mars 2021
Prénom :		Devoir n° 08 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 2 points

Cours : Relevez et complétez les phrases suivantes sur votre copie.

1 pt **1** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\text{dét}(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

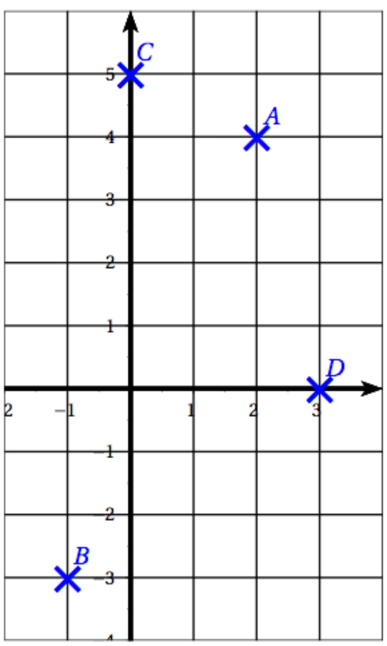
1 pt **2** A, B et C sont alignés ssi $\cdots$

$$\text{A, B et C sont alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires.}$$
$$\iff \text{dét}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 0$$

Exercice 2 — 2 points

2 pts

Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, placer les points $A(2\ ;\ 4)$, $B(-1\ ;\ -3)$, $C(0\ ;\ 5)$ et $D(3\ ;\ 0)$.



Exercice 3 — 1 point

1 pt

On considère les points $A(2\ ;\ 7)$ et $B(-3\ ;\ -5)$.

Calculer la longueur AB.

$\overrightarrow{AB}:\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-2\\-5-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-12\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}AB^2 &= 5^2+12^2\\ &= 25+144\\ &= 169\end{aligned}$$

Donc $AB=\sqrt{169}=13$

$$\boxed{AB=13}$$

Exercice 4 — 2 points

2 pts

On considère les points $A(2\ ;\ 5)$, $B(7\ ;\ 1)$, $C(1\ ;\ -3)$.

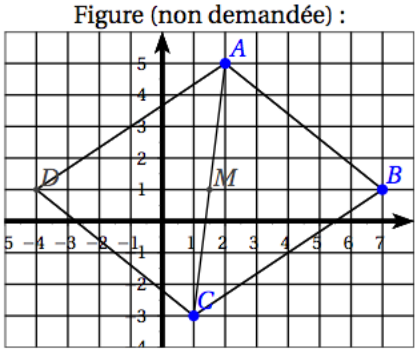
Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.On posera $D(x;y)$ ...

$\overrightarrow{AB}:\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-2\\1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DC}:\begin{pmatrix}x_C-x_D\\y_C-y_D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x\\-3-y\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}ABCD\text{est un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\ &\iff \begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x\\-3-y\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases}1-x=5\\-3-y=-4\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}-x=4\\-3-y=-1\end{cases}\end{aligned}$$

$$\boxed{D(-4;1)\text{ est donc le point tel que } ABCD \text{ soit un parallélogramme}}$$

Figure (non demandée) :



Exercice 5 — 1,5 point

1.5 pt

Le point $A\left(2\ ;\ \sqrt{3}\right)$ appartient-il au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{7}$?

Notons Γ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{7}$:

$$A\in\Gamma \iff OA=\sqrt{7}$$

Comme $\overrightarrow{OA}:\begin{pmatrix}x_A-x_O\\y_A-y_O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$, on déduit $OA^2=2^2+\sqrt{3}^2=4+3=7$.

$$\boxed{\text{Ainsi } OA = \sqrt{7} \text{ et donc } A \in \Gamma.}$$

Exercice 6

5,5 points

[Cours]

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(1;3);B(-1;4)$ et $C(3;-2)$.

1 pt **1** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-1 \\ 4-3 \end{pmatrix}$ ainsi $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

1 pt **2** Calculer AB

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{5}.$ $\boxed{AB = \sqrt{5}}$

3 Calculer les cordonnées du milieu de $[AC]$

Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $I\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_C}{2} \\ \frac{y_A+y_C}{2} \end{pmatrix}$ soit $\boxed{I\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

1.5 pt **4** Soit $D(2017\ ;\ -1005)$. Montrer que les points A, B et D sont alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 2017-1 \\ -1005-3 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 2016 \\ -1008 \end{pmatrix}$

On calcule $\text{dét}(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & 2016 \\ 1 & -1008 \end{vmatrix} = -2\times(-1008) - 1\times 2016 = -2016 - 2016 = 0$

$$\boxed{\text{Les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires, donc les points } A, B \text{ et } D \text{ sont alignés.}}$$

2 pts **5** Déterminer les coordonnées de P tel que $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{BP}$.

P vérifie $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{BP}$; en posant $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; on a $\overrightarrow{PA}\begin{pmatrix} 1-x \\ 3-y \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BP}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix}$ donc $3\overrightarrow{PB}\begin{pmatrix} 3x+3 \\ 3y-12 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{BP} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 3x+3 \\ 3-y = 3y-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 4x \\ 15 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{15}{4} \end{cases}$$

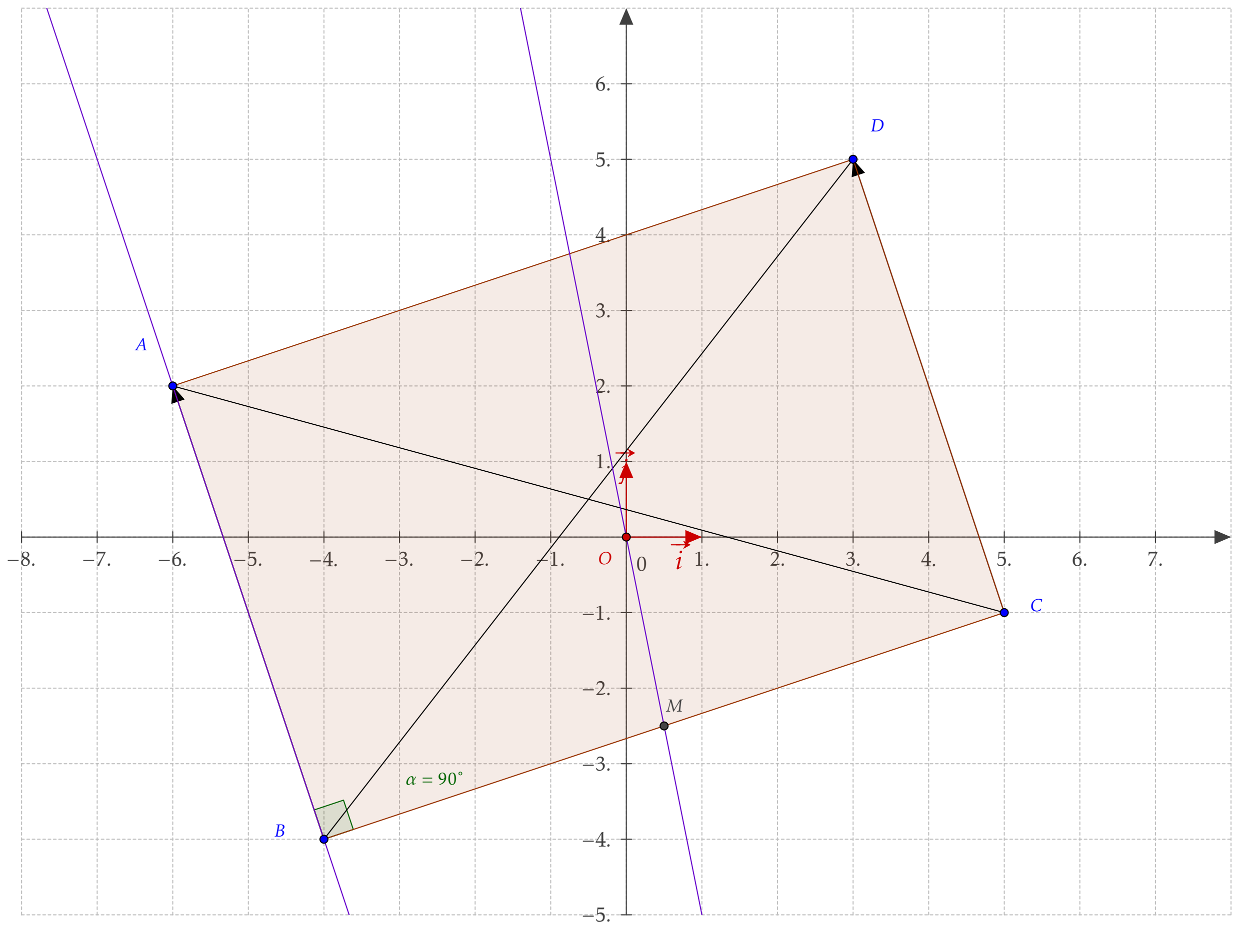
Donc $\boxed{P\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}}$

Exercice 7

7,5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions.

1 pt **1** Placer les points $A(-6;2)$, $B(-4;-4)$ et $C(5;-1)$.



1.5 pt **2** Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

$$ABCD \text{ est un parallélogramme} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\text{On pose} \quad D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4+6 \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5-x \\ -1-y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff \begin{cases} 5-x=2 \\ -1-y=-6 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } D\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ alors le quadrilatère } ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

2 pts **3** **a.** Calculer les distances AC et BC.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5+4 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$
$AC^2 = 11^2 + 3^2 = 130$	$BC^2 = 9^2 + 3^2 = 90$
$AC = \sqrt{130}$	$BC = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$$\boxed{AC = \sqrt{130} \text{ et } BC = 3\sqrt{10}}$$

1 pt **b.** Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4+6\\-4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$

Ainsi $AB^2 = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$.

On a donc $AC^2 = 130 = 40 + 90 = AB^2 + BC^2$.

D'après la propriété réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B.

Le quadrilatère $ABCD$ est donc un parallélogramme qui a un angle droit, c'est donc un rectangle.

1 pt **4** **a.** Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[BC]$.

Le milieu de $[BC]$ a pour coordonnées $M\begin{pmatrix}\frac{x_B+x_C}{2}\\\frac{y_B+y_C}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-4+5}{2}\\\frac{-4-1}{2}\end{pmatrix}$ soit

$$\boxed{M\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}}$$

1 pt **b.** Les droites (AB) et (OM) sont-elles parallèles ?

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x_M-x_O\\y_M-y_O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\text{dét}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OM}\right) &= \begin{vmatrix}2 & -\frac{1}{2}\\-6 & -\frac{5}{2}\end{vmatrix}\\ &= 2\times\left(-\frac{5}{2}\right)-(-6)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= -5-3=-8\neq 0\end{aligned}$$

Conclusion :dét$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OM}\right)\neq 0$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires ; ainsi les droites (AB) et (OM) ne sont pas parallèles.