Nom :	**DS 02**	2nde07 — Octt. 2020
Prénom :		Devoir n° 04 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 10 points

2 pts **1** Ecrire la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres 220 et 284.

$$\begin{array}{r|l} 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 284 & 2 \\ 142 & 2 \\ 71 & 71 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{200 = 2^2 \times 5 \times 11 \text{ et } 284 = 2^2 \times 71}$$

2 pts **2** Calculer le PGCD et le PPCM de 220 et 284.
$PGCD(220;284) = 2^2 = 4$ et $PPCM(220;284) = 2^2 \times 5 \times 11 \times 71 = 15\,620$

$$\boxed{PGCD(220;284) = 4 \text{ et } PPCM(220;284) = 15\,620}$$

2 pts **3** Dresser la liste des diviseurs de 220.

$$\boxed{\mathcal{D}iv(220) = \{1;2;4;5;10;11;20;22;44;55;110;220\}}$$

2 pts **4** Dresser la liste des diviseurs de 284.

$$\boxed{\mathcal{D}iv(284) = \{1;2;4;71;142;284\}}$$

2 pts **5**

Définition 1

- Un nombre d est un diviseur strict de n si d est un diviseur de n et $d < n$.
- Deux entiers naturels a et b sont amiables si et seulement si la somme des diviseurs stricts de chacun est égale à l'autre nombre.

Les nombres 220 et 284 sont-ils amiables ?

- La somme des diviseurs stricts de 220 vaut :

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

- La somme des diviseurs stricts de 284 vaut :

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

$$\boxed{\text{Conclusion : 220 et 284 sont amiables.}}$$

Exercice 2 — 5 points

Développer les expressions suivantes :

1 pt **1** $A = (x+1)(x+2) + (2x+1)(x-2)$

$$\begin{aligned} A &= (x+1)(x+2) + (2x+1)(x-2) \\ &= x^2 + 2x + x + 2 + 2x^2 - 4x + x - 2 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = (x+1)(x+2) + (2x+1)(x-2) = 3x^2}$$

1 pt **2** $B = (x-3)^2 + (x+1)(1-5x)$

$$\begin{aligned} B &= (x-3)^2 + (x+1)(1-5x) \\ &= x^2 - 6x + 9 + x - 5x^2 + 1 - 5x \\ &= -4x^2 - 10x + 10 \end{aligned}$$

$$\boxed{B = (x-3)^2 + (x+1)(1-5x) = -4x^2 - 10x + 10}$$

1.5 pt **3** $C = (5x+2)^2 + (5x-2)^2$

$$\begin{aligned} C &= (5x+2)^2 + (5x-2)^2 \\ &= 25x^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2 + \left(25x^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2\right) \\ &= 25x^2 + 2x + 4 + 25x^2 - 20x + 4 \\ &= 50x^2 + 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{C = (5x+2)^2 + (5x-2)^2 = 50x^2 + 8}$$

1.5 pt **4** $D = (3x+7)^2 - (2x+1)^2$

$$\begin{aligned} D &= (3x+7)^2 - (2x+1)^2 \\ &= 9x^2 + 2 \times 3x \times 7 + 7^2 - \left(4x^2 + 4x + 1\right) \\ &= 9x^2 + 42x + 49 - 4x^2 - 4x - 1 \\ &= 5x^2 + 38x + 48 \end{aligned}$$

$$\boxed{D = (3x+7)^2 - (2x+1)^2 = 5x^2 + 38x + 48}$$

Exercice 3 — 5 points

Factoriser les expressions suivantes :

1 pt **1** $A = (x+1)(x+2) + 3(x+1)$

$$\begin{aligned} A &= (x+1)(x+2) + 3(x+1) \\ &= (x+1)[(x+2) + 3] \\ &= (x+1)(x+2+3) \\ &= (x+1)(x+5) \end{aligned}$$

$$\boxed{A = (x+1)(x+2) + 3(x+1) = (x+1)(x+5)}$$

1.5 pt **2** $B=(x-3)(x+1)+2x-6$

$$\begin{aligned} B &= (x-3)(x+1)+2x-6 \\ &= (x-3)(x+1)+2(x-3) \\ &= (x-3)\left[(x+1)+2\right] \\ &= (x-3)(x+3) \end{aligned}$$

$$\boxed{B=(x-3)(x+1)+2x-6=(x+3)(x-3)}$$

1 pt **3** $C=9x^2-1$

$$\begin{aligned} C &= 9x^2-1 \\ &= (3x)^2-1^2 \\ &= (3x-1)(3x+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{C=9x^2-1=(3x-1)(3x+1)}$$

1.5 pt **4** $D=(3x+7)^2-(2x+1)^2$

$$\begin{aligned} D &= (3x+7)^2-(2x+1)^2 \\ &= \left[(3x+7-(2x+1)\right]\left[(3x+7+(2x+1)\right] \\ &= (3x+7-2x-1)(3x+7+2x+1) \\ &= (x+6)(5x+8) \end{aligned}$$

$$\boxed{D=(3x+7)^2-(2x+1)^2=(x+6)(5x+8)}$$

Exercice 4 — *2 points*

2 pts Démontrer que le produit de deux nombres impairs est impair.
Si on note a et b deux nombres impairs, on a $a=2k+1$ où k est un entier et $b=2\ell+1$ où ℓ est un entier.

$$\begin{aligned} a\times b &= (2k+1)(2\ell+1) \\ &= 2k\times 2\ell+2k+2\ell+1 \\ &= 2\underbrace{(2k\ell+k+\ell)}_{\text{entier}}+1 \end{aligned}$$

On a donc prouvé que $a\times b$ est de la forme $2K+1$ où $K=2k\ell+k+\ell$ est un entier.
Donc $a\times b$ est un entier impair.

$$\boxed{\text{Le produit de deux nombres impairs est impair.}}$$

Exercice 5 Bonus ! — *3 points*

3 pts Est-il possible d'ajouter un mêmeréel au numérateur et au dénominateur de $\dfrac{2}{7}$ pour obtenir le double de ce nombre rationnel ?

- Notons x le nombre ajouté au numérateur et au dénominateur de $\dfrac{2}{7}$.
- $\dfrac{2}{7}$ devient $\dfrac{+x2}{7+x}$.
- On cherche alors x tel que $\dfrac{2+x}{7+x}=2\times\dfrac{2}{7}$.

- $$\begin{aligned}\frac{2+x}{7+x}=2\times\frac{2}{7} \quad &\Longleftrightarrow \frac{2+x}{7+x}=\frac{4}{7}\\ &\Longleftrightarrow 7(2+x)=4(7+x)\\ &\Longleftrightarrow 14+7x=28+4x\\ &\Longleftrightarrow 7x-4x=28-14\\ &\Longleftrightarrow 3x=14\\ &\Longleftrightarrow x=\frac{14}{3}\end{aligned}$$

- Vérifions !

$$\begin{aligned}\frac{2+\frac{14}{3}}{7+\frac{14}{3}} \quad &= \frac{\frac{6}{3}+\frac{14}{3}}{\frac{21}{3}+\frac{14}{3}}\\ &= \frac{\frac{20}{3}}{\frac{35}{3}}\\ &= \frac{20}{3}\times\frac{3}{35}\\ &= \frac{20}{35}=\frac{4\times 5}{7\times 7}\\ &= \frac{4}{7}=2\times\frac{2}{7}\end{aligned}$$

Si on ajoute $\frac{14}{3}$ au numérateur et au dénominateur de $\frac{2}{7}$ on obtient le double de ce nombre !