Nom :	**DM 01**	2nde07 — Oct. 2020
Prénom :		Devoir n° 05 — …/…

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le soin apporté dans la réalisation des figures est important !

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1

Démontrer la proposition suivante : « Un entier est pair si, et seulement si, son carré est pair. »
On doit ici prouver une équivalence.
De façon plus schématique si on note $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions. Pour établir l'équivalence entre les propostions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$, on doit prouver les deux implications :

- Si $\mathscr{P}$ est vraie alors $\mathscr{Q}$ est vraie. On la note $(\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q})$
- Si $\mathscr{Q}$ est vraie alors $\mathscr{P}$ est vraie. On la note $(\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P})$

Ainsi prouver l'équivalence $\mathscr{P} \iff \mathscr{Q}$ revient à prouver les deux implications $\left\{\begin{array}{l}\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}\\ \mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}\end{array}\right.$

1 Prouvons donc ici la première implication :
Soit à prouver « Si un entier est pair alors son carré est pair. »
Soit n un entier pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$.
On déduit donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times \underbrace{2k^2}_{\text{entier}}$.
Comme n^2 s'écrit sous la forme 2 fois un entier, on a bien montré que n^2 est pair.

$$\boxed{\text{Si un entier est pair alors son carré est pair.}}$$

2 Prouvons donc ici la deuxième implication :
Soit à prouver « Si le carré d'un entier n est pair alors cet entier n est pair. »
On peut ici raisonner par l'absurde. On suppose donc la conclusion est fausse, à savoir n est impair.
Alors $n = 2\ell + 1$ où ℓ est un entier.
Mais alors $n^2 = (2\ell+1)^2 = 4\ell^2 + 2 \times 2\ell + 1^2 = 4\ell^2 + 4\ell + 1 = 2(2\ell^2 + 2\ell) + 1$
Ainsi $n^2 = 2 \times \underbrace{(2\ell^2 + 2\ell)}_{\text{entier}} + 1$.
Donc n^2 est de la forme 2 fois un entier plus 1, ce qui signifie que n^2 est un entier impair.
Ce qui contredit l'hypothèse n^2 est pair.
Donc l'hypothèse n est impair est absurde, et donc

$$\boxed{\text{Si le carré d'un entier } n \text{ est pair alors cet entier } n \text{ est pair.}}$$

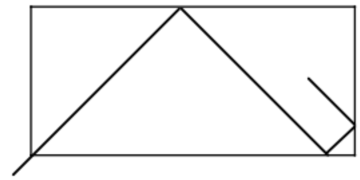
$$\boxed{\text{En conclusion, on a prouvé l'équivalence : Un entier est pair si, et seulement si, son carré est pair.}}$$

Exercice 2

[Multiples et diviseurs : un problème ouvert]

Le problème

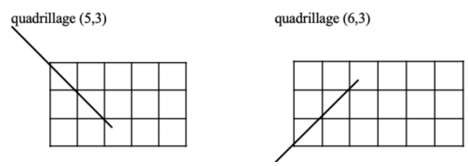
Un billard un peu spécial



A chacun des sommets d'un billard rectangulaire, une ouverture permet d'envoyer un rayon lumineux qui se réfléchit sur les côtés du rectangle.
On se donne deux conditions supplémentaires :

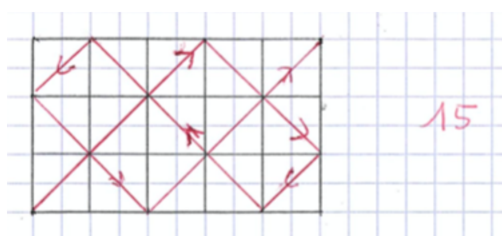
1. Le billard peut être quadrillé de façon régulière.
2. On envoie le rayon de lumière suivant la diagonale d'un carré du quadrillage. Il se réfléchit donc de la même façon. Sa trajectoire suit toujours les diagonales du quadrillage.

Exemple 1

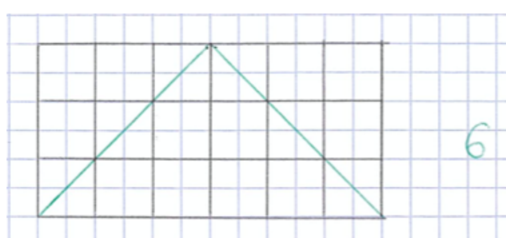


Pour chaque exemple :

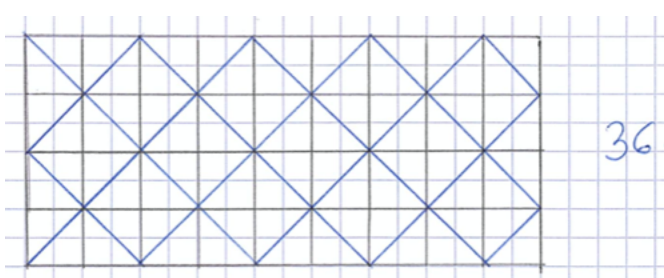
- dessiner la trajectoire de la lumière.
- combien le rayon traverse-t-il de carrés du quadrillage avant de sortir ?



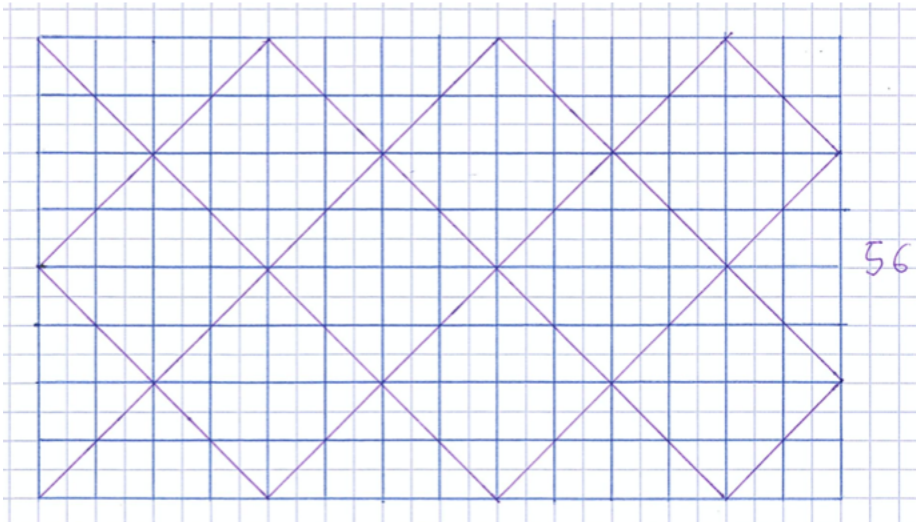
Pour un quadrillage (5 ;3) le rayon traverse 15 carrés du quadrillage. On remarque que $15 = 5 \times 3$.



Pour un quadrillage (6 ;3) le rayon traverse 6 carrés du quadrillage. On remarque que $36 = 9 \times 4$.



- Pour un quadrillage (9 ;4) le rayon traverse 36 carrés du quadrillage.

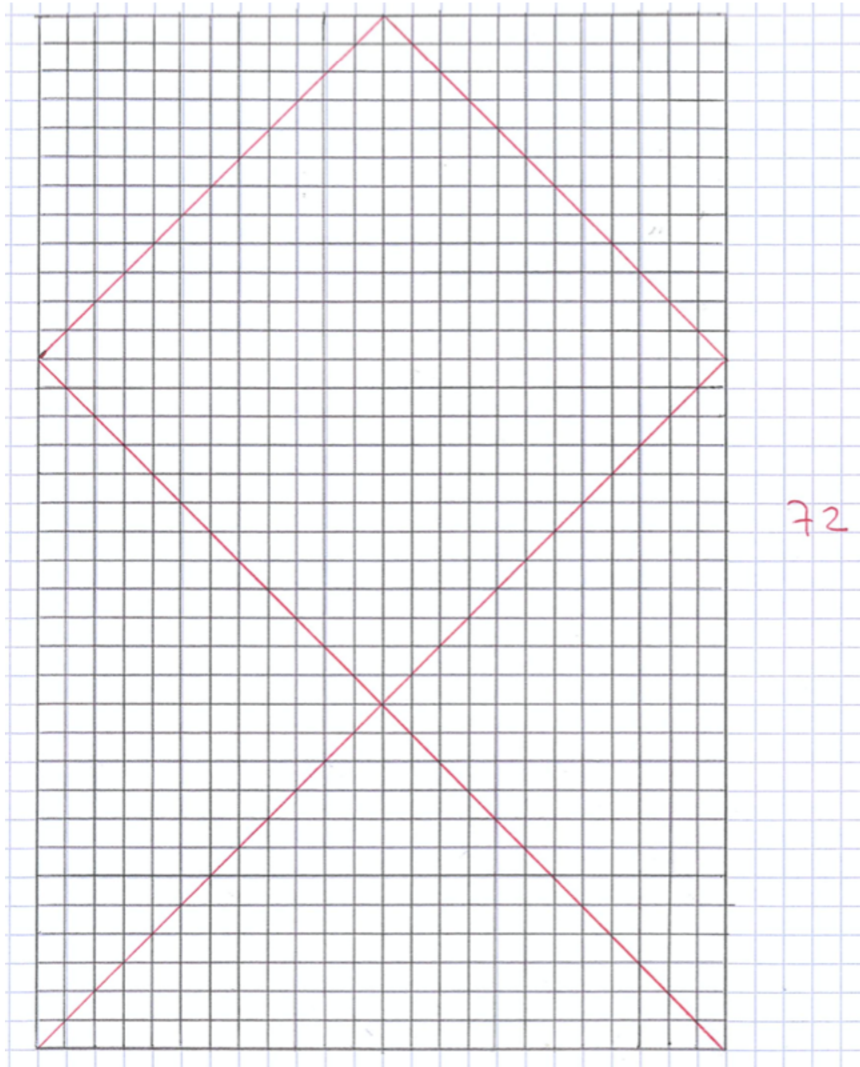
- 

  Pour un quadrillage (14;8) le rayon traverse 56 carrés du quadrillage.

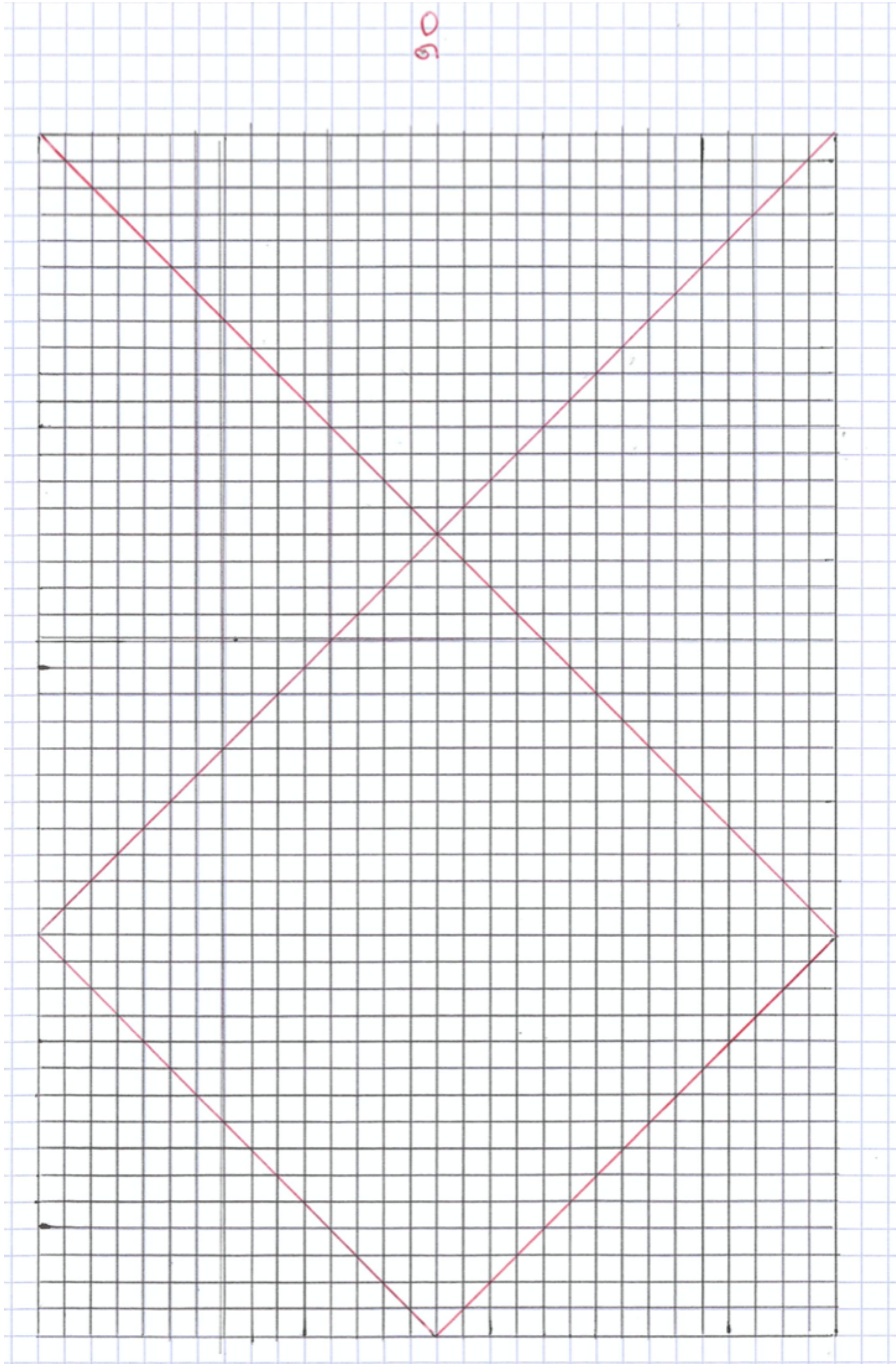
Méthode 1

On n'hésitera pas à tester des quadrillages de grande taille :

- (24 ; 36)
- (45 ; 30)



Pour un quadrillage (24;36) le rayon traverse 72 carrés du quadrillage.



Pour un quadrillage (45 ;30) le rayon traverse 90 carrés du quadrillage.

Méthode 2. Compléter ...

- Si m est multiple de n, le nombre de carreaux traversés est $\cdots$.
- Si m et n sont premiers entre eux, le nombre de carreaux traversés est $\cdots$.

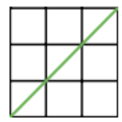
Méthode 3

Connaissant les dimensions (m,n) du quadrillage, peut-on prévoir le nombre de carrés traversés par le rayon lumineux ?

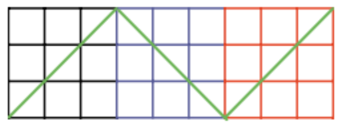
Vers une solution ?

Observons d'abord quelques cas.

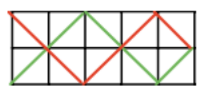
- Dimensions (3,3) : Le rayon suit la diagonale d'un carré. 3 carreaux sont traversés.



- Dimensions (9,3) : Le rayon suit la diagonale de trois carrés (3,3) successifs. 9 carreaux sont traversés.



- Dimensions (5,2) : Le rayon traverse deux carrés (2,2) , puis rebondit. Les 10 carreaux sont traversés.

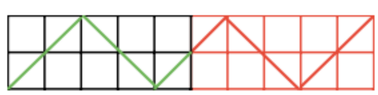


Deux conjectures peuvent être posées :

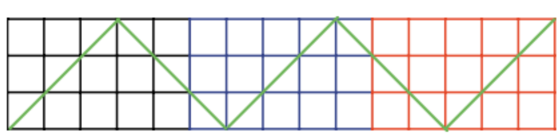
Conjecture 1

- Si m est multiple de n, le nombre de carreaux traversés est m.
- Si m et n sont premiers entre eux (pgcd(m,n)=1), le nombre de carreaux traversés est mn.

Observons de plus près le troisième cas. On peut "déplier" la trajectoire, en dessinant sa deuxième partie symétriquement sur un rectangle identique au premier :



Tout se passe comme si le rayon avait traversé 5 carrés (2,2).
Dimensions (5,3) : Pour "déplier" la trajectoire, il faut cette fois ajouter deux rectangles , de façon à ce que la longueur totale soit un multiple de 3.



Tout se passe comme si le rayon avait traversé 5 carrés (3,3).
Dimensions (4,7) Pour "déplier" la trajectoire sur une suite de carrés (4,4) on a besoin de 7 rectangles, de façon à ce que la longueur totale soit un multiple de 4.

Dimensions (m, n)
On suppose que $m > n$ La longueur du grand rectangle obtenu est un multiple de m. De plus, pour "déplier" la trajectoire sur une suite de carrés (n, n), il faut une longueur totale qui soit un multiple de n. D'où la conclusion :

Propriété 1

- Si m et n sont premiers entre eux, le premier multiple de n que l'on peut atteindre est le produit mn.
- Dans le cas général, c'est le plus petit multiple commun de m et n.