Nom :	**DS 05**	2nde17 Janv. 2020
Prénom :		Devoir n° 11 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.
Dans chaque exercice, le plan est muni d'un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ orthonormé.

Exercice 1 — 5 points

Cours : Relevez et complétez les phrases suivantes sur votre copie.

1 pt **1** Soit $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan et deux points $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - yA \end{pmatrix}$.

1 pt **2** Soit $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan et deux points $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$.
Les coordonnées du milieu $I\left(x_I;y_I\right)$ du segment $[AB]$ sont :

$$x_I = \frac{1}{2}\left(x_A + x_B\right) \text{ et } y_I = \frac{1}{2}\left(y_A + y_B\right)$$

1 pt **3** Soient $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$ deux points du plan muni d'un repère *orthonormal* $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$, la distance AB est donné par

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$$

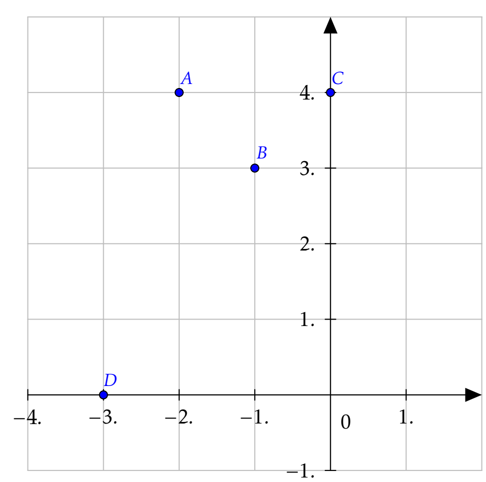
1 pt **4** $\vec{u}$ et $\vec{v}$sont colinéaires ssi dét$(\vec{u};\vec{v}) = 0$

1 pt **5** A, B et C sont alignés ssi $\cdots$

$$\begin{aligned} \text{A, B et C sont alignés} &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires.} \\ &\iff \text{dét}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 0 \end{aligned}$$

Exercice 2 — 2 points

2 pts



Dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, placer les points $A(-2\ ;\ 4)$, $B(-1\ ;\ 3)$, $C(0\ ;\ 4)$ et $D(-3\ ;\ 0)$.

Exercice 3 — 1,5 point

1.5 pt

On considère les points $A(2\ ;\ 7)$ et $B(-3\ ;\ -5)$.
Calculer la longueur AB.

$\overrightarrow{AB}:\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-2\\-5-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-12\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}AB^2 &= 5^2+12^2\\ &= 25+144\\ &= 169\end{aligned}$$

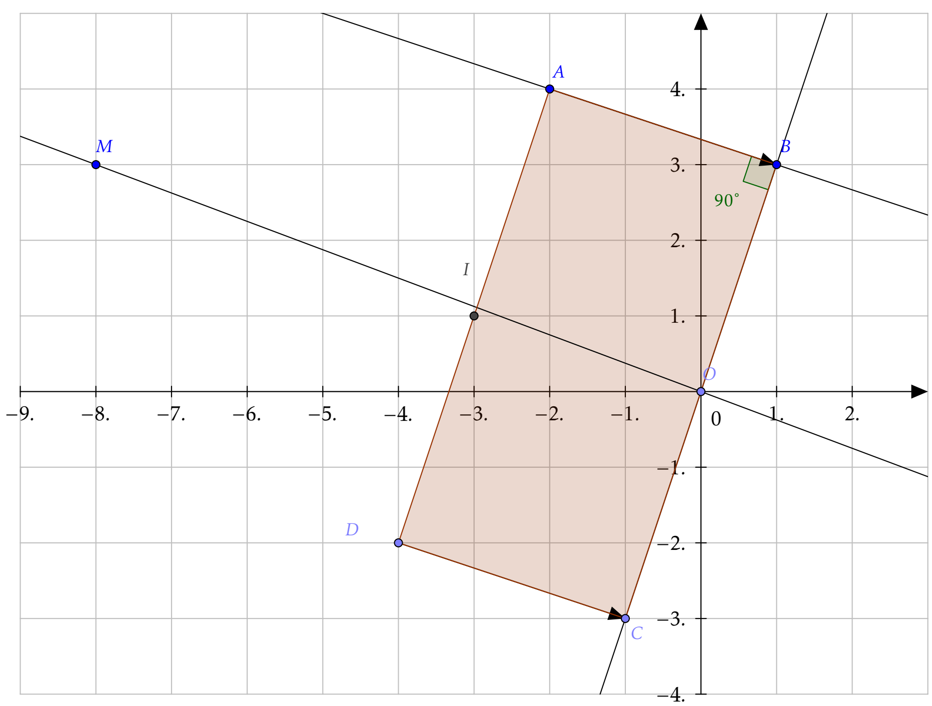
Donc $AB=\sqrt{169}=13$

$$\boxed{AB=13}$$

Exercice 4 — 8 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. La figure sera complétée tout au long des questions.

1 pt **1** Placer les points $A(-2;4)$, $B(1;3)$ et $C(-1;-3)$.



1.5 pt **2** Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

$$ABCD \text{ est un parallélogramme} \iff \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

$$\text{On pose } D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+2\\3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-1-x\\-3-y\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \iff \begin{cases}-1-x=3\\-3-y=-1\end{cases} \iff \begin{cases}x=-4\\y=-2\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } D\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} \text{ alors le quadrilatère } ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

2 pts **3** **a.** Calculer les distances AC et BC.

$$\begin{array}{r|l}
\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1+2\\-3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix} & \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1-1\\-3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}\\
AC^2=(-1)^2+(-7)^2=50 & BC^2=(-2)^2+(-6)^2=40\\
AC=\sqrt{50}=5\sqrt{2} & BC=\sqrt{40}=2\sqrt{10}
\end{array}$$

$$\boxed{AC=5\sqrt{2} \text{ et } BC=2\sqrt{10}}$$

1 pt **b.** Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

Ainsi $AB^2=3^2+(-1)^2=9+1=10$.
On a donc $AC^2=50=40+10=AB^2+BC^2$.
D'après la propriété réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B.

$$\boxed{\text{Le quadrilatère } ABCD \text{ est donc un parallélogramme qui a un angle droit, c'est donc un rectangle.}}$$

1 pt **4** **a.** Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[AD]$.

Le milieu de $[AD]$ a pour coordonnées $I\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_D}{2}\\\frac{y_A+y_D}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2-4}{2}\\\frac{4-2}{2}\end{pmatrix}$ soit

$$\boxed{I\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}}$$

1.5 pt **b.** Soit N$(-8;3)$ Les droites (AB) et (ON) sont-elles parallèles ?

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}x_N-x_O\\y_N-y_O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{dét}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{ON}\right) &= \begin{vmatrix}3 & -8\\-1 & 3\end{vmatrix}\\
&= 3\times 3-(-1)\times(-8)\\
&= 9-8=-1\neq 0
\end{aligned}$$

Conclusion :dét$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{ON}\right)\neq 0$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires ; ainsi les droites (AB) et (ON) ne sont pas parallèles.

Exercice 5 *6 points*

On considère les points $A(-2~;~4)$, $B(1~;~3)$, $C(2~;~-5)$.

2 pts **1** Les points A, B et C sont-ils alignés ? Le prouver grâce à un calcul.

$$\overrightarrow{AB}\ \begin{pmatrix}1+2\\3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\ \begin{pmatrix}2+2\\-5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-9\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\text{dét}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) &= \begin{vmatrix}3 & 4\\-1 & -9\end{vmatrix}\\ &= 3\times(-9)-(-1)\times(4)\\ &= -27+4=-23\neq 0\end{aligned}$$

Conclusion :dét$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\neq 0$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ; ainsi les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 pts **2** Calculer les coordonnées du point E vérifiant $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}$.

$$3\overrightarrow{AB}\ \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AE}\ \begin{pmatrix}x_E-x_A\\y_E-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2\\y-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB} &\iff \begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2\\y-4\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases}9=x+2\\-3=y-4\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=9-2\\y=4-3\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=7\\y=1\end{cases}\end{aligned}$$

Conclusion :$E\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$ vérifie $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}$

2 pts **3** Bonus

Calculer les coordonnées du point G vérifiant $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

On pose $G\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{GA}\ \begin{pmatrix}-2-x\\4-y\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{GB}\ \begin{pmatrix}x_B-x_G\\y_B-y_G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x\\3-y\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{GC}\ \begin{pmatrix}x_C-x_G\\y_C-y_G\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-x\\-5-y\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} &\iff \begin{pmatrix}-2-x\\4-y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-x\\3-y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2-x\\-5-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases}-2-x+1-x+2-x=0\\4-y+3-y-5-y=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}3x=1\\3y=2\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{2}{3}\end{cases}\end{aligned}$$

Conclusion :$G\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ vérifie $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.