Mathématiques en 2nde 2019 - 2020

Lycée l'Oiselet

2nde 05

Année Scolaire 2019 - 2020

Cours de Maths

Luc Giraud

Case des Maths

19 mars 2020

CASE DES MATHS

TD Racines carrées

Cours du mercredi 18 mars

1. Racines carrées d'entiers.

1.1. Définition.

$\sqrt{2}$ représente le nombre positif qui a pour carré 2 ; on ne peut pas écrire ce nombre autrement.

Définition 1

$\sqrt{a}$ est le nombre positif qui a pour carré a.

a est un carré, donc un nombre positif ; ainsi $\sqrt{-a}$ n'existe pas.

Définition 2

La *racine carrée* d'un entier naturel n est le nombre positif x tel que :

$$x \times x = x^2 = n$$

et on note : $x = \sqrt{n}$.

Remarques.

1. Compte tenu de la règle du signe d'un produit il est clair que l'on ne peut prendre la racine carrée que d'un nombre positif (ou nul).
2. Cette définition nécessiterait de démontrer que l'on peut toujours trouver un tel nombre x et que d'autre part il est unique (puisque positif).
3. Sauf si n est un carré parfait $(1, 4, 9, \ldots)$, $\sqrt{n}$ est un nombre qui n'est pas rationnel. Dans ce cas il n'y a pas d'écriture exacte du nombre plus simple que $\sqrt{n}$.
4. Trivialement : $\sqrt{n}^2 = n$.

1.2. Racine carrée et opérations.

Les règles de priorités sont les suivantes :

Propriété 1

1. Les calculs entre parenthèses ou crochets. S'il y a des parenthèses emboîtées les plus emboîtées sont prioritaires. La barre de fraction ou la racine carrée jouent le même rôle que des parenthèses.
2. Les exposants (puissances).
3. Les multiplications et division (÷) en allant de gauche à droite.
4. Les additions et soustractions en allant de gauche à droite.

Théorème 1

Le produit des racines carrées égale la racine carrée du produit. Pour a et b des entiers naturels :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Remarques.

1. Ce résultat se généralise à tous les nombres positifs et pas uniquement aux entiers.
2. Si de plus $b \neq 0$ alors de même :
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$
3. Il n'y pas de résultat équivalent pour les additions et soustractions : $\sqrt{9} + \sqrt{4} \neq \sqrt{9+4}$.

Remarque 1

D'après les remarques précédentes on peut calculer la racine carrée d'un nombre rationnel.
On remarque que les nombres obtenus par racine carré sont impossibles à écrire sous forme décimale c'est pourquoi on est obligé d'apprendre à manipuler les expressions radicales qui sont la seule façon d'écrire de tels nombres.

2. Exercices.

Exercice 1

Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers b étant le plus petit possible.
Vous pouvez utiliser une décomposition en facteurs premiers. Et en désespoir de cause sachez trouver les valeurs à la calculatrice.

1. $A = \sqrt{36}$
2. $B = \sqrt{8}$
3. $C = \sqrt{2} \times \sqrt{18}$
4. $D = \sqrt{7} \times \sqrt{14}$

Correction 1

1. $A = \sqrt{6^2} = 6$
2. $B = \sqrt{2^3} = \sqrt{2 \times 2^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2^2} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$
3. $C = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{2^2 \times 3^2} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} = 2 \times 3$
4. $D = \sqrt{7 \times 14} = \sqrt{2 \times 7^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{7^2} = 7\sqrt{2}$

Exercice 2

Évaluez les quantités suivantes en donnant le résultat sous forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers b étant le plus petit possible.

1. $A = \sqrt{64}$
2. $B = \sqrt{27}$
3. $C = \sqrt{15} \times \sqrt{3}$

4. $D = \sqrt{12} \times \sqrt{6}$

Correction 2

1. $A = \sqrt{8^2} = 8$
2. $B = \sqrt{3 \times 9} = \sqrt{3} \times \sqrt{3^2} = \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$
3. $C = \sqrt{5 \times 3} \times \sqrt{3} = \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{5} \times \sqrt{3}^2 = 3\sqrt{5}$
4. $D = \sqrt{12 \times 6} = \sqrt{4 \times 3 \times 2 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

Exercice 3

Lorsqu'un calcul comprend des fractions et des racines carrées le résultat doit être présenté sous la forme $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ avec a, b et c des entiers, b étant non nul et c le plus petit possible. Écrivez les calculs suivants sous cette forme :

1. $A = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$
2. $B = \frac{\sqrt{7}}{22} \times \frac{11}{\sqrt{7}}$
3. $C = \frac{\sqrt{240}}{\sqrt{85}}$

Correction 3

1. $A = \frac{\sqrt{2\times3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$
2. $B = \frac{\sqrt{7}\times11}{22\times\sqrt{7}} = \frac{11\sqrt{7}}{2\times11\sqrt{7}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$
3. $C = \frac{\sqrt{2^4\times3\times5}}{\sqrt{5\times17}} = \sqrt{2^4} \times \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{17}} = 4\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}} = 4\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 4\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{17}}{\sqrt{17}\times\sqrt{17}} = 4\frac{\sqrt{3\times17}}{\sqrt{17^2}} = \frac{4}{17}\sqrt{51}$

Exercice 4

Le résultat non justifié garanti la moitié des points.

1. Évaluez la A en donnant le résultat sous forme $a\sqrt{b}$ avec a et b des entiers b étant le plus petit possible.
$$A = \sqrt{3} \times \sqrt{12}$$
2. Calculez la valeur de B sous la forme $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ avec a, b et c des entiers, $\frac{a}{b}$ étant irréductible et c le plus petit possible.
$$B = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{63}}$$

Correction 4

Exercice 5

Un triangle MNP rectangle en P est tel que : $MN = 4$ et $NP = \frac{1}{2}$
Calculez MP.

Correction 5

Calculons MP.
MNP est rectangle en P donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$MP^2 + NP^2 = MN^2$$

Or : $MN = 4$ et $NP = \frac{1}{2}$ donc

$$MP^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4^2$$

ce qui équivaut successivement à

$$MP^2 + \frac{1}{4} = 16$$
$$MP^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 16 - \frac{1}{4}$$
$$MP^2 = \frac{63}{4}$$

Autrement dit $MP = \sqrt{\frac{63}{4}}$ ou $MP = -\sqrt{\frac{63}{4}}$.
Mais MP est une longueur donc est un nombre positif :

$$MP = \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{\sqrt{3^2 \times 7}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

Finalement
$MP = \frac{3}{2}\sqrt{7}$

Exercice 6

Un triangle ABC rectangle en A est tel que : $AB = \frac{2}{3}$ et $AC = \frac{3}{2}$.
Calculez BC.

Correction 6

♡
Calculons BC.
ABC est rectangle en A donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Donc :

$$BC^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$BC^2 = \frac{4}{9} + \frac{9}{4}$$
$$BC^2 = \frac{97}{36}$$

BC est une longueur c'est donc un nombre positif :

$$BC = \sqrt{\frac{97}{36}}$$

Donc :
$BC = \frac{1}{6}\sqrt{97}$

Exercice 7

Un triangle MNP rectangle en M est tel que : $MN = \frac{7}{3}$ et $MP = 2$.
Calculez MN.

Correction 7

2.1. Ce qu'il faut retenir.

1. "L'affinité" qu'il y a entre la racine carrée et la multiplication ou la division.
2. Le résultat d'un calcul impliquant une racine carrée est souvent un nombre irrationnel. Il est donc impossible d'en donner une écriture décimale. Dans ce cas le résultat est donné en conservant le symbole $\sqrt{}$.
3. Pour ceux qui envisage la filière scientifique l'astuce de la quantité conjuguée se généralise (pas vu cette année).
4. Théorème de Pythagore (et sa réciproque).

3. Exercices Wims.

http://wims.unice.fr/wims/fr_H3 algebra docracines.fr.html

Cours du jeudi 19 mars

3.1. Plan

1. On continue à corriger, commenter des exercices
2. Je propose également des exercices avec corrigés sur les thèmes suivants :
   (a) Les racines carrées
   (b) Déveveloppements
   (c) Factorisations

3.2. Quelques exercices du TD d'hier

Fait pendant la visioconférence

3.3. Quelques exercices avec correction

http://casedesmaths.net/images/3.2nde/Annee$_2019-2020/Continuite_pedagogique/2nde/Jeudi19mars/exercices$
$19-mars-2020.pdf$