Nom : .... Prénom :	**DS 06**	2nde17 — Déc. 2018 — Devoir n° 12 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.*** *Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.*

Exercice 1 — 2 points

1 pt **1** Quand dit-on qu'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est orthogonal ?

Un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est orthogonal lorsque $(OI) \perp (OI)$.

1 pt **2** Comment appelle-ton un repère orthogonal qui a la même unité sur les deux axes ?

Un repère orthogonal qui a la même unité sur les deux axes est appelé repère orthonormal ou orthonormé .

Exercice 2 — 2 points

2 pts Dans un repère (O ; I ; J), on considère les points A(2 ; 5) et B(3 ; 1).
Calculer les cordonnées du point M, milieu du segment [AB].
Les cordonnées du point M, milieu du segment [AB] sont :
$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Par conséquent, on a : $M\left(\dfrac{5}{2}\ ;\ 3\right)$

Exercice 3 — 2,5 points

2.5 pts Dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points A(2 ; 1), B(5 ; 2), C (7 ; 5) et D(4 ; 4).
Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

- Avec les milieux : Soit M le milieu de la diagonale [AC].
  $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \boxed{\dfrac{9}{2}}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \boxed{3}$.
  Soit M' le milieu de la diagonale [BD].
  $x_{M'} = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \boxed{\dfrac{9}{2}}$ et $y_{M'} = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \boxed{3}$.
  Les points M et M' ont les même coordonnées donc $\boxed{M = M'}$.

ABCD est un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu : c'est un **parallélogramme**.

- Avec les vecteurs : ABCD est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
  $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} : \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-4 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$:, donc ABCD est un parallélogramme .

Exercice 4 *3 points*

3 pts Dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points A(1 ; -3), B(5 ; 1), C (3 ; 7).
Calculer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

- Avec les milieux :
  Les diagonales [AC] et [BD] doivent avoir le même milieu.
  M, milieu de [AC] a pour coordonnées :
  $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{4}{2} = \boxed{2}$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{4}{2} = \boxed{2}$.
  On note x_D et y_D les coordonnées de D.
  On doit donc avoir :
  $x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2}$ donc $2 = \dfrac{5 + x_D}{2}$. On en déduit $5 + x_D = 2 \times 2 = 4$ d'où $x_D = 4 - 5 = \boxed{-1}$.
  $y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2}$ donc $2 = \dfrac{1 + y_D}{2}$. On en déduit $1 + y_D = 2 \times 2 = 4$ d'où $y_D = 4 - 1 = \boxed{3}$.

  D a pour coordonnées $D(-1\ ;\ 3)$.

- Avec les vecteurs :on pose $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

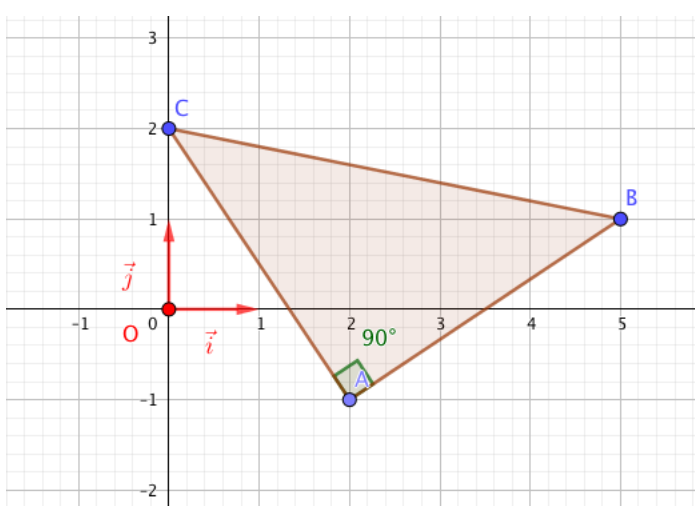
$$\begin{aligned} ABCD \text{ est un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ &\iff \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-x \\ 7-y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 4 = 3 - x \\ 4 = 7 - y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3 - 4 = -1 \\ y = 7 - 4 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

D a pour coordonnées $D(-1\ ;\ 3)$.

Exercice 5 *4 points*

4 pts Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère les points A(2 ; -1), B(5 ; 1) et C(0 ; 2).

1 Faire une figure.



2 Calculer les longueurs AB, BC et AC.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$= \sqrt{(5-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{13}}$.

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$= \sqrt{(0-5)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{26}}$.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$= \sqrt{(0-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{13}}$.

3 En déduire la nature exacte du triangle ABC.

On a $AB = AC$ donc le triangle ABC est isocèle en A.

$BC^2 = 26$; $AB^2 + AC^2 = 13 + 13 = 26$ donc $\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$.

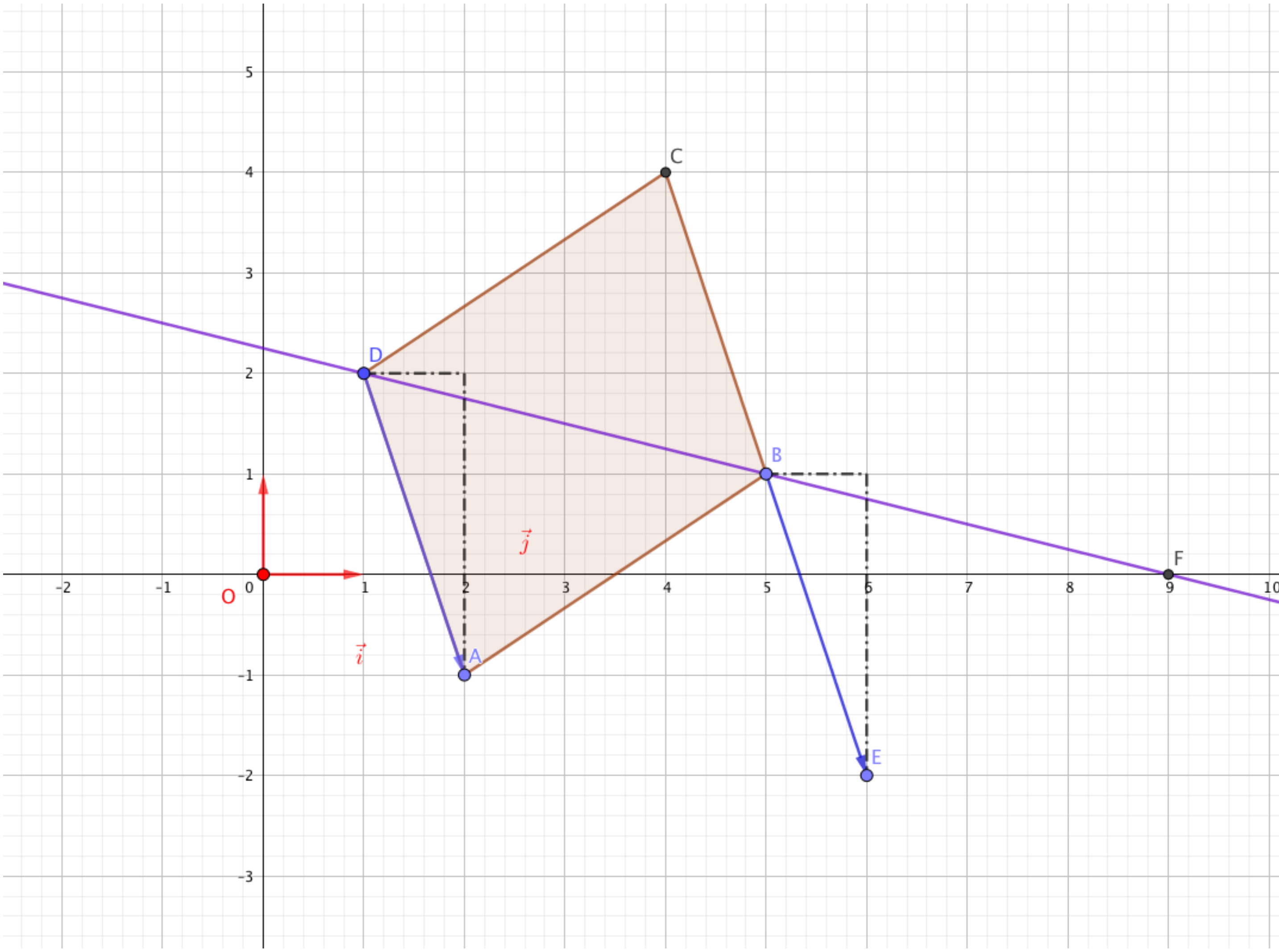
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est **rectangle** en B.

Conclusion : le triangle ABC est **isocèle rectangle** en B.

Exercice 6 — 2 points

Dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A(2 ; -1), B(5 ; 1), C(4 ; 4) et D(1 ; 2).

1 Faire une figure.



2 Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

Les coordonnées du milieu de la diagonale [AC] sont $\left(3\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Les coordonnées du milieu de la diagonale [BD] sont $\left(3\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

On trouve les même coordonnées,

donc les deux diagonales ont le même milieu : ABCD est un **parallélogramme**.

3 **a.** Placer E tel que ADBE soit un parallélogramme.

- Méthode 1 : ADBE donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BE}$
- Méthode 2 : Puisque ADBE est un parallélogramme, les longueurs AD et BE sont égales, de même que DB et AE. On utilise alors un compas pour construire E en reportant les deux longueurs.

b. Démontrer que les points C, B et E sont alignés.

- Méthode 1 : Puisque ABCD est un parallélogramme, les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
  ADBE est un parallélogramme, donc les droites (AD) et (BE) sont parallèles.
  La droite (AD) est parallèle aux droites (BC) et (BE) donc ces deux droites (BC) et (BE) sont **parallèles**.
  Elles ont le points B en commun, donc elles sont **confondues**.
  On en déduit que les points B, C et E sont **alignés**.

• Méthode 2 : Comme $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BE}$, en posant $E\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
ADBE \text{ est un parallélogramme} &\iff \overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BE}\\
&\iff \begin{pmatrix}2-1\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-5\\y-1\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}1=x-5\\-3=y-1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x=6\\y=-2\end{cases}
\end{aligned}$$

E a pour coordonnées $\boxed{E(6\,;\,-2)}$.

On montre alors que B est le milieu de $[CE]$: $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(x_C+x_E)\\\frac{1}{2}(y_C+y_E)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(4+6)\\\frac{1}{2}(4-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\frac{1}{2}(y_C+y_E)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$

Donc B est le milieu de [CE], et donc C, B et E sont alignés.

2 pts **4** On donne $F(9,0)$ et $G(-19,7)$. Les points B,F et G sont-ils alignés ? Justifier.

Exercice 7 — 0 point

Soit (O , I , J) un repère orthonormé du plan. On considère les points A (3 ; 5), B(5 ; 0), C (-1 ; -1) et D (-3 ; 4).

1. Faire une figure , qui sera complétée par la suite.
2. Calculer les longueurs AB, BC et AC.
3. Le triangle ABC est-il rectangle ?
4. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD (parallélogramme ? losange ? rectangle ?) ; justifier.
5. Calculer les coordonnées du point E tel que BACE soit un parallélogramme.
6. Démontrer que les points D, C et E sont alignés.
7. Retrouver le résultat de la question 6., l'alignement des points C, D et E, en vérifiant que le point C est le milieu du segment [DE]
8. Que pensez-vous de l'affirmation de Nils ? « Les points A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 5 ? ».