Nom :	**DS**	2nde	Avril 2017
Prénom :		Devoir n° 07	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est sur 4 pages (recto-verso)

Exercice 1 — 6 points

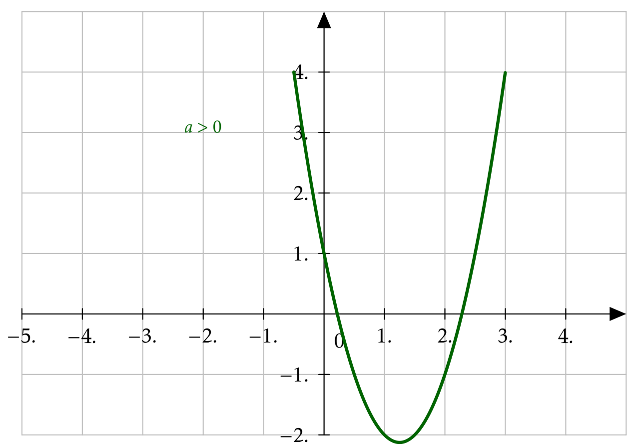
Compléter le résultat du cours rappelé ci-dessous : Dans cet exercice f est une fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

2 pts ♡ Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

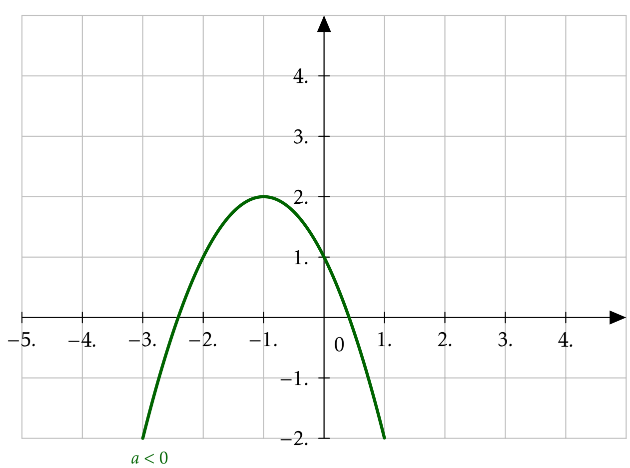
1 pt ♡ Si $a > 0$ alors la représentation graphique de f est ________________________ .

1 pt ♡ Tracer une représentation grapphique possible de f sur le repère ci-dessous dans le cas où $a > 0$



1 pt ♡ Si $a < 0$ alors la représentation graphique de f est ________________________.

1 pt ♡ Tracer une représentation grapphique possible de f sur le repère ci-dessous dans le cas où $a < 0$



Exercice 2 — 3,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-1)^2 - 2x + 1$

2 pts **1** Est-elle une fonction polynôme du second degré ? Justifier.

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x-1)^2 - 2x + 1 \\ & 9x^2 - 6x + 1 - 2x + 1 \\ &= 9x^2 - 8x + 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = 9x^2 - 8x + 2}$$

1.5 pt **2** Si oui donner ses coefficients a, b et c.
Comme $f(x) = 9x^2 - 8x + 2$,

$$\boxed{a = 9, b = -8,\ c = 2.}$$

Exercice 3 — 6 points

Dans chacun des cas suivants, mettre $f(x)$ sous forme canonique

3 pts **1** $f(x) = 2x^2 + 6x + 7$.
f est une fonction trinôme avec $a = 2, b = 6$ et $c = 7$.

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{6}{4} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= f(\alpha) \\ &= f\left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= 2 \times \frac{9}{4} + 6 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 7 \\ &= \frac{9}{2} - 9 + 7 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-\alpha)^2 + \beta \\ &= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}}$$

3 pts **2** $f(x) = -x^2 + 5x - 4$.
f est une fonction trinôme avec $a = -1, b = 5$ et $c = -4$.

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-5}{2} \\ &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= f(\alpha) \\ &= f\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= -\frac{25}{4} + 5 \times \left(\frac{5}{2}\right) - 4 \\ &= \frac{25}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-\alpha)^2 + \beta \\ &= -1\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}$$

Exercice 4 — 6 points

Dans chacun des cas suivants, dresser le tableau de variation de f en le justifiant :

3 pts **1** $f(x) = 2(x-5)^2 - 1$.
On a ici la forme canonique de la fonction f :

♡ Comme $a = 2$, on a $a > 0$, la courbe de f est une parabole tournée vers le haut.

♡ $\alpha = 5$ et $\beta = -1$

♡ On en déduit le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

3 pts **2** $f(x) = -(x+3)^2 + 5x + 4$. On cherche la forme développée et réduite de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+3)^2 + 5x + 4 \\ &= -(x^2 + 6x + 9) + 5x + 4 \\ &= -x^2 - 6x - 9 + 5x + 4 \\ &= -x^2 - x - 5 \end{aligned}$$

On a : $a = -1, b = -1$ et $c = -5$

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{-1}{-2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta &= f(\alpha) \\ &= f\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 5 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{20}{4} = -\frac{19}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(x) &= a(x-\alpha)^2 + \beta \\ &= -1\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{19}{4} \end{aligned}$$

On a ici la forme canonique de la fonction f :

♡ Comme $a = -1$, on a $a < 0$, la courbe de f est une parabole tournée vers le bas.

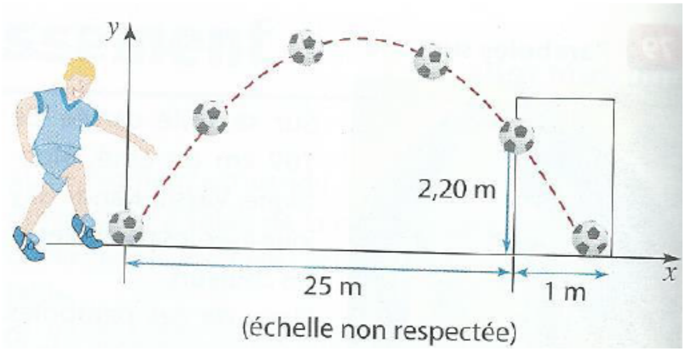
♡ $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{19}{4}$

♡ On en déduit le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	$-\frac{19}{4}$	$\searrow$	

Exercice 5 — 3 points

3 pts Bonus Un joueur situé à 25m du but adverse tente un tir et parvient à marquer. Son ballon a franchi la ligne de but à une hauteur de 2,20m passant ainsi tout près de la barre transversale, puis a ainsi atteint le sol à 1m derrière la ligne de but. Sachant que la trajectoire du ballon est une parabole, quelle hauteur maximale le ballon a-t-il atteinte ?



On fait l'hypothèse que le tir est parabolique.
On note $f(x) = ax^2 + bx + c$
On lit à partir du graphique :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(26) = 0 \\ f(25) = 2,2 \end{cases}$$

Comme $f(0) = f(26) = 0$, on déduit que la droite d'équation $x = 13$ est axe de symétrie de C_f.
Par ailleurs comme $f(0) = f(26) = 0$, on déduit que la forme factorisée de f est :

$$f(x) = a(x-0)(x-26)$$

$$\begin{aligned} f(25) = 2,2 &\iff a(25-0)(25-26) = 2,2 \\ &\iff -25a = 2,2 \\ &\iff a = -\frac{2,2}{25} = -\frac{4 \times 2,2}{4 \times 25} = -0,088 \end{aligned}$$

Donc $f(x) = -0,088x(x-26)$
Le sommet de la parabole est le point $S(\alpha;\beta)$ où $\alpha = 13$ et $\beta = f(13) = -0,088 \times 13(13-26) = 14,872$

$\boxed{\text{Le ballon a donc atteint une hauteur maximale de 14,872 m.}}$