DS 09 Sujet A

Calcul intégral.

Exo :

$$I = \int_0^1 (5x^4 + x^2 + 1)\,dx$$

On pose $f(x) = 5x^4 + x^2 + 1$

F une primitive de f

$$F(x) = x^5 + \frac{x^3}{3} + x$$

$$I = F(1) - F(0)$$

$$F(1) = 1^5 + \frac{1^3}{3} + 1$$
$$= 1 + \frac{1}{3} + 1$$
$$= \frac{7}{3}$$

$F(0) = 0$ d'où $\underline{I = \frac{7}{3}}$

$$J = \int_1^2 \frac{1}{4x+1}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{4x+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{4x+1}$$

on pose $u = 4x+1$

$u' = 4$

$$f = \frac{1}{4} \cdot \frac{u'}{u}$$

donc $F = \frac{1}{4} \ln|u|$

$$F(x) = \frac{1}{4} \ln|4x+1|$$

$$J = F(2) - F(1)$$

$$F(2) = \frac{1}{4} \ln|4\times 2+1| = \frac{1}{4} \ln 9$$

$$F(1) = \frac{1}{4} \ln|4\times 1+1| = \frac{1}{4} \ln 5$$

$$\underline{J = \frac{\ln 9 - \ln 5}{4}}$$

$$K = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{3}\ \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}}$$

On pose $u = x^3 + 1$

$u' = 3x^2$

$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{u'}{\sqrt{u}}$ d'où $F = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{u} = \frac{2}{3}\sqrt{u}$

Ainsi $F = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}$

$$K = F(2) - F(0)$$

$$F(2) = \frac{2}{3}\sqrt{2^3+1}$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{9}$$
$$= \frac{2}{3} \times 3 = 2$$

$$F(0) = \frac{2}{3}\sqrt{0^3+1}$$
$$= \frac{2}{3}$$

$$K = F(2) - F(0)$$
$$= 2 - \frac{2}{3}$$
$$= \frac{6}{3} - \frac{2}{3}$$
$$= \frac{4}{3}$$

$$\underline{K = \frac{4}{3}}$$

Ex3

La valeur moyenne de $f(x) = e^{3x}$ sur $[1;\ln 2]$

est $\mu = \frac{1}{\ln 2 - 1} \int_1^{\ln 2} f(x)\,dx$

ici $f(x) = e^{3x}$

$= \frac{1}{3} \cdot 3e^{3x}$

$f = \frac{1}{3} u' e^{u}$ où $u = 3$

d'où $F = \frac{1}{3} e^{u}$ ainsi $F(x) = \frac{1}{3} e^{3x}$

Puis $\mu = \frac{1}{\ln 2 - 1} \left(F(\ln 2) - F(1) \right)$

$F(\ln 2) = \frac{1}{3} e^{3\ln 2} = \frac{1}{3} e^{\ln(2^3)} = \frac{1}{3} e^{\ln 8} = \frac{8}{3}$

$F(1) = \frac{1}{3} e^{3}$

Ainsi $\mu = \frac{1}{\ln 2 - 1} \left(\frac{8 - e^3}{3} \right)$

$= \frac{8 - e^3}{3(\ln 2 - 1)}$

Ex4 :

La fonction f est négative sur $[-1;6]$

L'aire hachurée vaut $A = -\int_{-1}^{6} f(x)\,dx$

ici $f(x) = x^2 - 5x - 6$

F une primitive de f

$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x$

$F(6) = \frac{6^3}{3} - 5 \times \frac{6^2}{2} - 6 \times 6$

$= 72 - 90 - 36$

$= -54$

$F(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - 5 \frac{(-1)^2}{2} - 6(-1)$

$= -\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6$

$= \frac{19}{6}$

$A = \frac{343}{6}$ u.a.

$A = -\left(F(6) - F(-1) \right)$

$= F(-1) - F(6)$

$= \frac{19}{6} + 54 = \frac{343}{6}$

DS 09 Sujet B
Calcul intégral

Ex 6

$$I = \int_0^2 (x^3 + 2x + 3)\,dx$$

$f(x) = x^3 + 2x + 3$

$F(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 + 3x$

$I = F(2) - F(0)$

$F(2) = \frac{2^4}{4} + 2^2 + 3 \times 2$

$= 4 + 4 + 6$

$= 14$

$F(0) = 0$

$\underline{I = 14}$

$$K = \int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx$$

$f(x) = \sin(2x)$

$= \frac{1}{2} \times 2 \sin(2x)$

$f = \frac{1}{2} u' \sin u$ où $u = 2x$, $u' = 2$

$F = \frac{1}{2}(-\cos u) = -\frac{1}{2}\cos u$

$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$

$K = F(\pi) - F(0)$

$F(\pi) = -\frac{1}{2}\cos 2\pi$

$= -\frac{1}{2}$

$F(0) = -\frac{1}{2}\cos 0$

$= -\frac{1}{2}$

d'où $K = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\underline{K = 0}$

$$J = \int_0^1 (3x+2)^3\,dx$$

on a $f(x) = (3x+2)^3$

$= \frac{1}{3} \times 3 (3x+2)^3$

$u = 3x+2$

$u' = 3$

$f = \frac{1}{3} u' u^3$

d'où $F = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{3+1}}{3+1} = \frac{1}{12} u^4$

$F(x) = \frac{1}{12}(3x+2)^4$

$J = F(1) - F(0)$

$F(1) = \frac{1}{12}(3+2)^4 = \frac{625}{12}$

$F(0) = \frac{1}{12} \times 2^4 = \frac{16}{12}$

$J = \frac{625}{12} - \frac{16}{12} = \frac{609}{12} = \frac{20}{4}$

$\underline{J = \frac{203}{4}}$

Ex 7 la valeur moyenne de $f(x) = e^{2x}$ sur $[1 ; \ln 3]$

est $\mu = \frac{1}{\cancel{1-}\ln 3 - 1} \int_1^{\ln 3} f(x)dx$

ici $f(x) = e^{2x} = \frac{1}{2} \times 2e^{2x}$

d'où $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

$\mu = \frac{1}{\ln 3 - 1} \left(F(\ln 3) - F(1) \right)$

$F(\ln 3) = \frac{1}{2} e^{2\ln 3} = \frac{1}{2} e^{\ln(3^2)} = \frac{1}{2} e^{\ln 9} = \frac{9}{2}$

$F(1) = \frac{1}{2} e^2$

Puis $\mu = \frac{1}{\ln 3 - 1} \left(\frac{9 - e^2}{2} \right)$

$\mu = \frac{9 - e^2}{2(\ln 3 - 1)}$

Ex 8 : Comme f est négative sur $[-1 ; 2]$

l'aire hachurée vaut $A = -\int_{-1}^{2} f(x)dx$

ici $f(x) = x^2 - x - 2$

$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$

$A = -\left(F(2) - F(-1) \right)$

$= F(-1) - F(2)$

$F(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \times 2$

$= \frac{8}{3} - 2 - 4$

$= \frac{8}{3} - \frac{6}{3} - \frac{12}{3}$

$= -\frac{10}{3}$

$F(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - \left(\frac{-1}{2}\right) - 2(-1)$

$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2$

$= \frac{7}{6}$

$A = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{27}{6} = \frac{3 \times 9}{3 \times 2}$

$A = \frac{9}{2}$ u.a.