Nom :	DS 08	TSTI2D Oiselet	Mars 2024
Prénom :		Devoir n° 11	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 4 points

4 pts

Relevez et complétez le tableau ci-dessous :

Enoncé	Forme résolue	a	Solution générale
$y'+4y=0$	$y'=-4y$	-4	$y=Ce^{-4x}$ où $C\in\mathbb{R}$
$3y'+10y=0$	$y'=-\frac{10}{3}y$	$-\frac{10}{3}$	$y=Ce^{-\frac{10}{3}x}$ où $C\in\mathbb{R}$

Exercice 2 — 4 points

4 pts

Relevez et complétez le tableau ci-dessous :

Enoncé	Forme résolue	a	b	Solution générale
$y'=3y+4$	$y'=3y+4$	3	4	$y=-\dfrac{4}{3}+Ce^{3x}$ où $C\in\mathbb{R}$
$2y'-5y=10$	$y'=\dfrac{5}{2}y+5$	$\dfrac{5}{2}$	5	$y=-2+Ce^{\frac{5}{2}x}$ où $C\in\mathbb{R}$

Exercice 3 — 8,5 points

Partie A On considère l'équation différentielle (E) :$4y'+5y=15$

2 pts **1** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $4y'+5y=15$.
$4y'+5y=15$ s'écrit en isolant y' :

$$\begin{aligned} 4y'+5y=15 &\iff 4y'=-5y+15 \\ &\iff y'=-\tfrac{5}{4}y+\tfrac{15}{4} \end{aligned}$$

Elle est du type $y'=ay+b$ où $a=-\frac{5}{4}=-1,25$ et $b=\frac{15}{4}$, les solutions de cette équation sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=Ce^{ax}-\dfrac{b}{a}$, soit ici
$g(x)=Ce^{-1,25x}+3$ où C désigne une constante réelle quelconque.

> Les solutions de cette équation sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=Ce^{-1,25x}+3$ où C désigne une constante réelle quelconque.

1 pt **2** Justifier que $f(x)=6e^{-1,25x}+3$ est solution de (E).
Comme $g(x)=-4e^{-1,25x}+3$ est de la forme $Ce^{-1,25x}+3$ avec $C=6$, on déduit que $f(x)=6e^{-1,25x}+3$ est solution de (E).

1 pt **3** Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative passe par le point $(0;-1)$.
Déjà g est une solution de (E), donc $g(x)=Ce^{-1,25x}+3$.
La courbe représentative passe par le point $(0;-1)$ donc $g(0)=-1$

$$\begin{aligned} g(0)=-1 &\iff Ce^{-1,25\times 0}+3=-1 \\ &\iff C+3=-1 \\ &\iff C=-4 \end{aligned}$$

La solution g de (E) dont la courbe représentative passe par le point $(0;-1)$. est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -4e^{-1,25x} + 3$.

Partie B On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -4e^{-1,25x} + 3$

1 pt **1** Déterminer la dérivée g
Comme $(e^u)' = u'e^u$, on déduit $g'(x) - 4 \times (-1,25)e^{-1,25x}$

$$\boxed{g'(x) = 5e^{-1,25x}}$$

1 pt **2** Prouver que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On étudie le signe de la dérivée :

- $5 > 0$
- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel x on a $e^{-1,25x} > 0$
- Par produit on déduit que pour tout réel x on a $g'(x) > 0$

Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

1 pt **3** Quelle est la limite de g en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (-1,25x2) = -\infty \\ \lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0 \end{array}\right\} \text{ par composée } \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-1,25x} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (-4) = -4 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-1,25x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Par produit } \lim\limits_{x \to +\infty} -4e^{-1,25x} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -4e^{-1,25x} = -0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 3 = 3 \end{array}\right\} \text{ Par somme } \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 3$$

$$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 3}$$

1.5 pt **4** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 2$

$$\begin{aligned} g(x) = 2 \quad & \Longleftrightarrow -4e^{-1,25x} + 3 = 2 \\ & \Longleftrightarrow -4e^{-1,25x} = -1 \\ & \Longleftrightarrow e^{-1,25x} = \frac{1}{4} \\ & \Longleftrightarrow \ln\left(e^{-1,25x}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \\ & \Longleftrightarrow -1,25x = -\ln(4) \\ & \Longleftrightarrow x = \frac{4}{5}\ln(4) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{4}{5}\ln(4)\right\}}$$

Exercice 4 — **9 points**

La fonte GS (graphite sphéroïdal) possède des caractéristiques mécaniques élevées et proches de celles des aciers. Une entreprise fabrique des pièces de fonte GS qui sont utilisées dans l'industrie automobile.
Ces pièces sont coulées dans des moules de sable et ont une température de 1 400 °C à la sortie du four. Elles sont entreposées dans un local dont la température ambiante est maintenue à une température de 30 °C. Ces pièces peuvent être démoulées dès lors que leur température est inférieure à 650 °C.
La température en degrés Celsius d'une pièce de fonte est une fonction du temps t, exprimé en heures, depuis sa sortie du four. On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle :

$$y' + 0,065y = 1,95.$$

2 pts **1** Résoudre sur $[0\,;+\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0,065y = 1,95$.
$y' + 0,065y = 1,95 \iff y' = -0,065y + 1,95$.
Elle est du type $y' = ay + b$ où $a = -\frac{5}{4} = -0,0655$ et $b = 1,95$, les solutions de cette équation sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = Ce^{at} - \dfrac{b}{a}$, soit ici
$f(t) = Ce^{-0,065t} + 30$ où C désigne une constante réelle quelconque.

Les solutions de cette équation sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = Ce^{-1,25x} + 3$ où C désigne une constante réelle quelconque.

1 pt **2** Donner $f(0)$ et vérifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(t) = 1\,370\mathrm{e}^{-0,065t} + 30.$$

Ces pièces sont coulées dans des moules de sable et ont une température de 1 400 °C à la sortie du four, donc $f(0) = 1400$.

$$\begin{aligned} f(0) = 1400 &\iff Ce^{-0,065\times 0} + 30 = 1400 \\ &\iff Ce^{0} + 30 = 1400 \\ &\iff C + 30 = 1400 \\ &\iff C = 1370 \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $f(t) = 1\,370\mathrm{e}^{-0,065t} + 30$

1.5 pt **a.** Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
On étudie le signe de la dérivée :
$f'(t) = 1\,370 \times (-0,065)\mathrm{e}^{-0,065t} + 0 = -89,05\mathrm{e}^{-0,065} < 0$.

En effet $\left.\begin{array}{l} -89,5 < 0 \\ \mathrm{e}^{-0,065t} > 0 \end{array}\right\}$ Par produit $-89,05\mathrm{e}^{-0,065} < 0$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

0.5 pt **b.** Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?
La fonction f représente la température de la pièce après sa sortie du four ; la pièce refroidit en sortant du four donc la température diminue et donc la fonction f est décroissante.

1 pt **3** La pièce de fonte peut-elle être démoulée après avoir été entreposée 5 heures dans le local ?

On cherche la température de la pièce après avoir été entreposée 5 heures dans le local :
$f(5) = 1\,370\mathrm{e}^{-0,065\times 5} + 30 \approx 1\,020 > 650$

donc la pièce ne peut pas être démoulée après 5 heures.

1.5 pt **4** **a.** Déterminer au bout de combien de temps au minimum la pièce pourra être démoulée. Arrondir le résultat à la minute près.

La pièce pourra être démoulée après un temps t tel que $f(t) < 650$; on résout cette inéquation :

$$\begin{aligned} f(t) < 650 & \\ & \iff 1\,370\mathrm{e}^{-0,065\times t} + 30 < 650 \\ & \iff 1\,370\mathrm{e}^{-0,065\times t} < 620 \\ & \iff \mathrm{e}^{-0,065\times t} < \frac{620}{1\,370} \\ & \iff -0,065t < \ln\left(\frac{620}{1\,370}\right) \\ & \iff t > \frac{\ln\left(\frac{620}{1\,370}\right)}{-0,065} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{620}{1\,370}\right)}{-0,065} \approx 12,20$

$\boxed{\text{donc on pourra démouler la pièce au bout de } 12,20 \text{ h soit 12 heures et 12 minutes.}}$

1.5 pt **b.** Pour éviter la fragilisation de la fonte, il est préférable de ne pas démouler la pièce avant que sa température ait atteint 325 °C.

Dans ce cas faudra-t-il attendre exactement deux fois plus de temps que pour un démoulage à 650 °C ? Justifier la réponse.

On résout l'inéquation $f(t) < 325$:

$$\begin{aligned} f(t) < 325 & \iff 1\,370\mathrm{e}^{-0,065\times t} + 30 < 325 \\ & \iff 1\,370\mathrm{e}^{-0,065\times t} < 295 \\ & \iff \mathrm{e}^{-0,065\times t} < \frac{295}{1\,370} \\ & \iff -0,065t < \ln\left(\frac{295}{1\,370}\right) \\ & \iff t > \frac{\ln\left(\frac{295}{1\,370}\right)}{-0,065} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{295}{1\,370}\right)}{-0,065} \approx 23,63$ qui n'est pas le double de $12,20$;

$\boxed{\text{il ne faudra donc pas attendre exactement deux fois plus de temps que précédemment.}}$