Nom : .... Prénom :	DS 04	TSTI2D Oiselet Nov. 2023 Devoir n° 08 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 5 points

Je connais mon cours !

1 pt **1** Donner la dérivée de $f(x) = \ln x$:

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

2 pts **2** Compléter les formules suivantes :

- $\ln 1 = 0$
- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a$

2 pts **3** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(3x+1) = \ln 2$

- L'équation a un sens ssi $3x + 1 > 0$

$$\begin{aligned} 3x+1>0 &\iff 3x > -1 \\ &\iff x > -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$D = \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

- Sur D, on a :

$$\begin{aligned} \ln(3x+1) = \ln 2 &\iff 3x+1 = 2 \\ &\iff 3x = 1 \\ &\iff x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- Comme $\frac{1}{3} \in D$, $\frac{1}{3}$ est solution.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}}$$

Exercice 2 — 4 points

4 pts Calculer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :

- $A = \ln(36)$
- $B = \ln(24) + \ln\sqrt{18}$
- $C = \ln\left(3^4 \times 2^7\right)$
- $D = \ln\left(\frac{3^5}{2^6}\right)$

$$\begin{aligned} A &= \ln(36)\\ &= \ln(6^2)\\ &= 2\ln 6\\ &= 2\left(\ln(2\times 3)\right)\\ &= 2\left(\ln(2+\ln 3)\right)\\ &= 2\ln 2 + 2\ln 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \ln(24)+\ln\sqrt{18}\\ &= \ln\left(3\times 2^3\right)+\frac{1}{2}\ln(18)\\ &= \ln 3 + 3\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\left(2\times 3^2\right)\\ &= \ln 3 + 3\ln 2 + \frac{1}{2}\left(\ln(2)+\ln\left(3^2\right)\right)\\ &= \frac{7}{2}\ln(2) + 2\ln(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \ln\left(3^4\times 2^7\right)\\ &= \ln\left(3^4\right)+\ln\left(2^7\right)\\ &= 4\ln 3 + 7\ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \ln\left(\frac{3^5}{2^6}\right)\\ &= \ln\left(3^5\right)-\ln\left(2^6\right)\\ &= 5\ln 3 - 6\ln 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{A = 2\ln 2 + 2\ln 3 ; B = \frac{7}{2}\ln 2 + 2\ln 3 ; C = 4\ln 3 + 7\ln 2 ; D = 5\ln 3 - 6\ln 2}$$

Exercice 3 — *4 points*

4 pts Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1 $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 + \mathrm{e}^x$

$$\boxed{f'(x) = 4x + 3 + \mathrm{e}^x}$$

2 $g(x) = \mathrm{e}^{x^2}$
On utilise la formule $(\mathrm{e}^u)'\, u'\mathrm{e}^u$

$$\boxed{g'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}}$$

3 $h(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2$

$$\boxed{h'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}}$$

Exercice 4 — *2 points*

2 pts Déterminer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{4x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (4x) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} exp(t) = +\infty \end{array}\right\} \text{par composée } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{4x} = +\infty$$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-4x} - 2x$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} (4x) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} exp(t) = +\infty \end{array}\right\} \text{par composée } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{4x} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{4x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty \end{array}\right\} \text{Par somme } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-4x} - 2x = +\infty$$

Exercice 5 — *8 points*

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^{3x}$, définie sur $\mathbb{R}$.

2 pts **1** Calculer limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f.

✍ Limite en $+\infty$: $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (3x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{par composée } \lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

✍ Limite en $-\infty$: La fonction exponentielle est prépondérante sur les puissances(croissances comparées), comme $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x) = 0$, on déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

3 pts **2** Montrer que $f'(x) = (1+3x)e^{3x}$ puis étudier les variations de f.

f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. $f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= 1+3x \\ v(x) &= e^{3x}\end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 3 \\ v'(x) &= 3e^{3x}\end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\times e^{3x} + 3e^{3x}\times x \\ &= e^{3x}(1+3x)\end{aligned}$$

1 pt **3** Dresser alors le tableau de variations.

✍ On étudie le signe de la dérivée :

- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x on a $e^{3x} > 0$, ainsi $f'(x)$ a le signe de $1+3x$.
-

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 1+3x = 0 \\ &\iff 3x = -1 \\ &\iff x = -\tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

✍ Comme $a = 3$, la fonction affine $1+3x$ est du signe de $a = 3$ après le 0.

✍ On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{3e}$	$\nearrow$	$+\infty$

2 pts **4** Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{3x}$ est une primitive de f. F est une primitive de f signifie $F' = f$. F est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. $F = uv$, d'où $F' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans D_f : $\begin{cases} u(x) &= \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) \\ v(x) &= e^{3x}\end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= \frac{1}{3} \\ v'(x) &= 3e^{3x}\end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{3x}\times\tfrac{1}{3} + 3e^{3x}\times\left(\tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{9}\right) \\ &= e^{3x}\left(\tfrac{1}{3} + 3\times\left(\tfrac{x}{3} - \tfrac{1}{9}\right)\right) \\ &= e^{3x}\left(\tfrac{1}{3} + 3\times\tfrac{x}{3} - 3\times\tfrac{1}{9}\right) \\ &= xe^{3x} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Comme $F' = f$, F est bien une primitive de f.

Exercice 6 — *6 points*

6 pts La fonction θ, représentée ci-dessous, modélise l'évolution de la température du four (exprimée en degrés Celsius) en fonction du temps t (exprimé en minute) écoulé depuis la fin de la pyrolyse. L'instant initial $t = 0$ correspond au début de la phase de refroidissement.

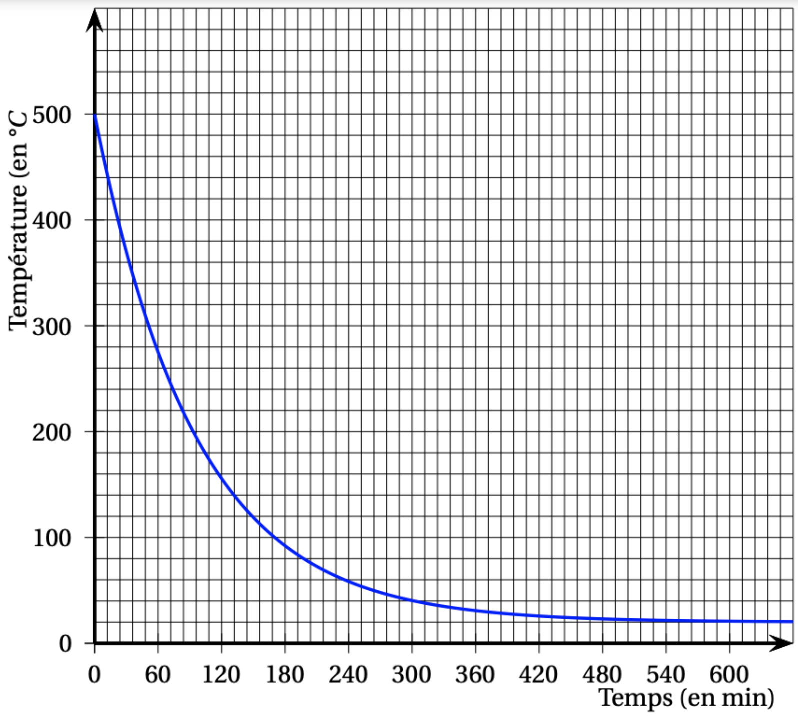

Figure 1 : évolution de la température en fonction du temps lors de la phase de refroidissement

1 Déterminer graphiquement $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t)$.

Il semble que $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t) = 20$

2 Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

La température après 10 heures de refroidissement va se rapprocher de 20 °C.

La fonction θ utilisée pour cette modélisation est définie sur $[\,0\,;+\infty[$ par :

$$\theta(t) = 480\mathrm{e}^{-\frac{1}{95}t} + 20.$$

3 Calculer la valeur exacte de la solution de l'équation $\theta(t) = 280$.

$$\begin{aligned}
\theta(t) = 280 \quad &\Longleftrightarrow 480\mathrm{e}^{-\frac{1}{95}t} + 20 = 280\\
&\Longleftrightarrow 480\mathrm{e}^{-\frac{1}{95}t} = 260\\
&\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{95}t} = \frac{260}{480}\\
&\Longleftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{95}t}\right) = \ln\left(\frac{13}{24}\right)\\
&\Longleftrightarrow -\frac{1}{95}t = \ln\left(\frac{13}{24}\right)\\
&\Longleftrightarrow t = -95\ln\left(\frac{13}{24}\right)
\end{aligned}$$

$-95\ln\left(\frac{13}{24}\right) \approx 58,24$ min.

Pour des raisons de sécurité, le fabricant impose que la porte du four reste verrouillée tant que la température du four est supérieure à 280 °C.

la valeur exacte de la solution de l'équation $\theta(t) = 280$ est $t = -95\ln\left(\frac{13}{24}\right)$.

4 Au bout de combien de temps la porte se déverrouille-t-elle ?
On a $58,24 = 58 + 0,24 \times 60 \approx 58$ min 14 s.

La porte se dévérouillera au bout de d'environ 58 minutes et 14 secondes.