Nom :	**DS 03**	TSTI2D Oiselet — *Nov. 2022*
Prénom :		*Devoir n° 06* — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 3 points

Je connais mon cours !

1 pt **1** Donner la dérivée de $f(x) = e^x$:

$$\boxed{\text{Si } f(x) = e^x \text{ alors } f'(x) = e^x}$$

2 pts **2** Complétonsles formules suivantes :

- $e^0 = 1$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $(e^x)^n = e^{nx}$
- $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

Exercice 2 : Equations — 4 points

2 pts **1** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x \times e^{-4} = (e^x)^4$.

$$\begin{aligned} e^x \times e^{-4} = (e^x)^4 &\iff e^{x-4} = e^{4x} \\ &\iff x - 4 = 4x \\ &\iff -3x = 4 \\ &\iff x = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{4}{3}\right\}}$$

2 pts **2** $e^{3x^2} = e^{2x+1}$.

$$\begin{aligned} e^{3x^2} = e^{2x+1} &\iff 3x^2 = 2x + 1 \\ &\iff 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$

$$\begin{array}{ll|ll} x_1 & = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 & = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ & = \dfrac{2+4}{6} & & = \dfrac{2-4}{6} \\ & = 1 & & = -\dfrac{1}{3} \end{array}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{1 ; -\frac{1}{3}\right\}}$$

Exercice 3 : Inéquations — 5 points

Résoudre les inéquations :

1.5 pt **1** $e^x > e^{1-x}$

$$\begin{aligned} e^x > e^{1-x} &\iff x > 1-x \\ &\iff 2x > 1 \\ &\iff x > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[}$$

1.5 pt **2** $e^x - \dfrac{1}{e^x} > 0$

$$\begin{aligned} e^x - \frac{1}{e^x} > 0 &\iff e^x > \frac{1}{e^x} \\ &\iff e^x > e^{-x} \\ &\iff x > -x \\ &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} =]0;+\infty[}$$

2 pts **3** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(2e^x + 14)(x-3) \leq 0$.

On étudie le signe de chaque facteur du produit et n fait le bilan dans un tableau de signes :

- ✍ Pour tout réel x on a $e^x > 0$, donc $2e^x > 0$, puis $2e^x + 14 > 14 > 0$.
  Ainsi pour tout réel x ; $2e^x + 14$ est strictement positif.
- ✍ $x - 3 > 0 \iff x > 3$
- ✍ On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $(2e^x + 14)$		+		+	
signe de $x - 3$		-	0	+	
signe de $f(x)$		-	0	+	

On lit l'ensemble des solutions sur le tableau précédent :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty;3]}$$

Exercice 4 — 6 points

6 pts Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = e^{-x+7} \times e^{-4x+6} \qquad B = e^{(x+1)^2} \times e \qquad C = \left(e^{x+1}\right)^2 \times e$$

$$D = \frac{e^{3x-4}}{e^{-3x+4}} \qquad E = e^{-5} \times e^{-3x+4} \times e^2 \qquad F = \left(e^{-3}\right)^2 \times e^{2x+2} \times \frac{1}{e^4}$$

$$\begin{aligned} A &= e^{-x+7} \times e^{-4x+6} \\ &= e^{-x+7-4x+6} \\ &= e^{-5x+13} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B &= e^{(x+1)^2} \times e \\ &= e^{x^2+2x+1+1} \\ &= e^{x^2+2x+2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} C &= \left(e^{x+1}\right)^2 \times e \\ &= e^{2(x+1)} \times e^1 \\ &= e^{2x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{e^{3x-4}}{e^{-3x+4}} \\ &= e^{3x-4-(-3x+4)} \\ &= e^{6x-8} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} E &= e^{-5} \times e^{-3x+4} \times e^2 \\ &= e^{-5-3x+4+2} \\ &= e^{-3x+1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F &= \left(e^{-3}\right)^2 \times e^{2x+2} \times \frac{1}{e^4} \\ &= e^{-6+2x+2-4} \\ &= e^{2x-8} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} A = e^{-5x+13} & B = e^{x^2+2x+2} & C = e^{2x+3} \\ D = e^{6x-8} & E = e^{-3x+1} & F = e^{2x-8} \end{array}}$$

Exercice 5 — 3 points

3 pts Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1 $f(x) = x^2 - 3x + \mathrm{e}^{-x}$ **2** $g(x) = x\mathrm{e}^x$ **3** $h(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$

1 $f(x) = 5x^2 + 3x + 1 - 2e^x$

$$\boxed{f'(x) = 10x + 3 - 2e^x}$$

2 $g(x) = (2x+1)e^x$ g est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.

$g = uv$, d'où $g' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= 2x+1 \\ v(x) &= e^x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 2 \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^x + (2x+1)e^x \\ &= (2 + 2x + 1)e^x \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = (2x+3)e^x}$$

3 $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$ h est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$h = \dfrac{u}{v}$ d'où $h' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= e^x - 1 \\ v(x) &= 2e^x + 1 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= e^x \\ v'(x) &= 2e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{e^x(2e^x+1) - 2e^x(e^x-1))}{(2e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(2e^x+1-2(e^x-1))}{(2e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(2e^x+1-2e^x+2)}{(2e^x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{3e^x}{(2e^x+1)^2}}$$

Exercice 6 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (1-x)e^x + 1$.

1.5 pt **1** Montrer que pour tout réel x de $[0;+\infty[$ on a : $f'(x) = -xe^x$

✍ Dérivée : f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $f = uv + 1$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans D_f : $\begin{cases} u(x) &= 1-x \\ v(x) &= e^x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= -1 \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \times e^x + e^x \times (1-x) \\ &= e^x(-1+1-x) \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = -xe^x}$$

1.5 pt **2** Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

✍ Signe de la dérivée : la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $f'(x)$ a le signe de $-x$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff -x > 0 \\ &\iff x < 0 \end{aligned}$$

✍ La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$

✍ La fonction f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

1 pt **3** Donner le tableau de variations de f. On déduit le tableau de variations de f sur $]-\infty;+\infty[$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗	2	↘	

$$f(0) = 1 + e^0 = 2$$

1 pt **4** Donner une équation de T la tangente à C_f la courbe de f au point d'abscisse 1.
T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

✏ $f'(1) = -e^1 = -e$

✏ $f(1) = (1-1)e^1 + 1 = 1$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = -e(x-1)+1, \text{ soit } y = -ex + e + 1}$$